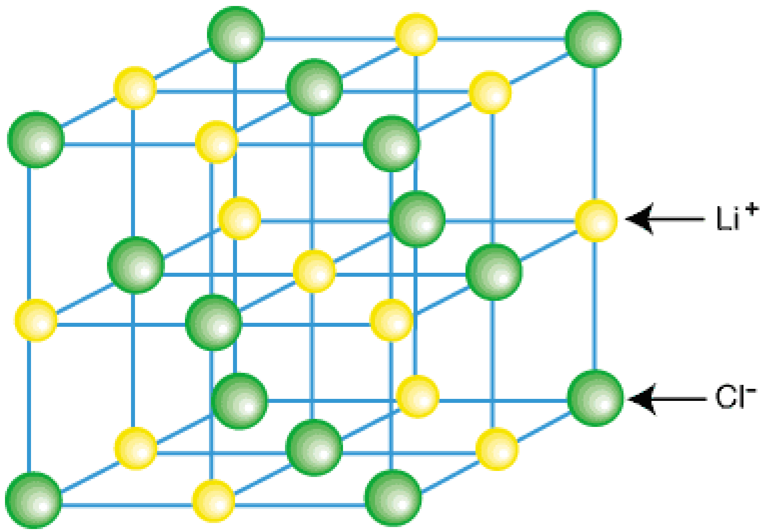
Características de Escala Libre en Redes Aleatorias

Dolores Lara.

Octubre, 2005.

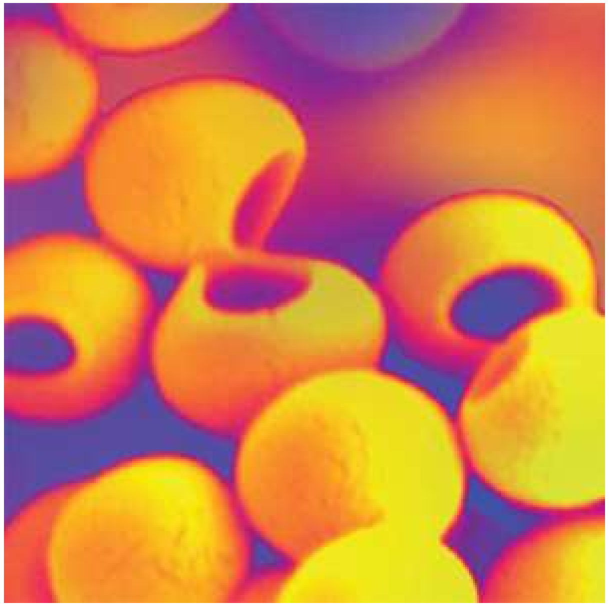
Introducción



elementos idénticos

+

interacciones locales



Introducción (cont)

Sistema Complejo

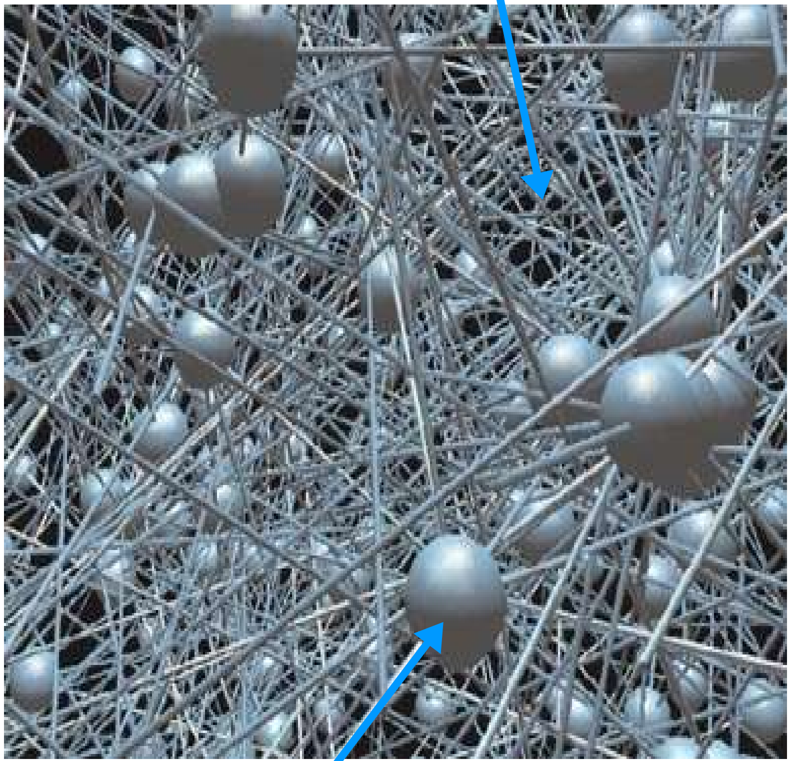
muchos elementos no idénticos

conectados por interacciones diversas y no locales

⇓

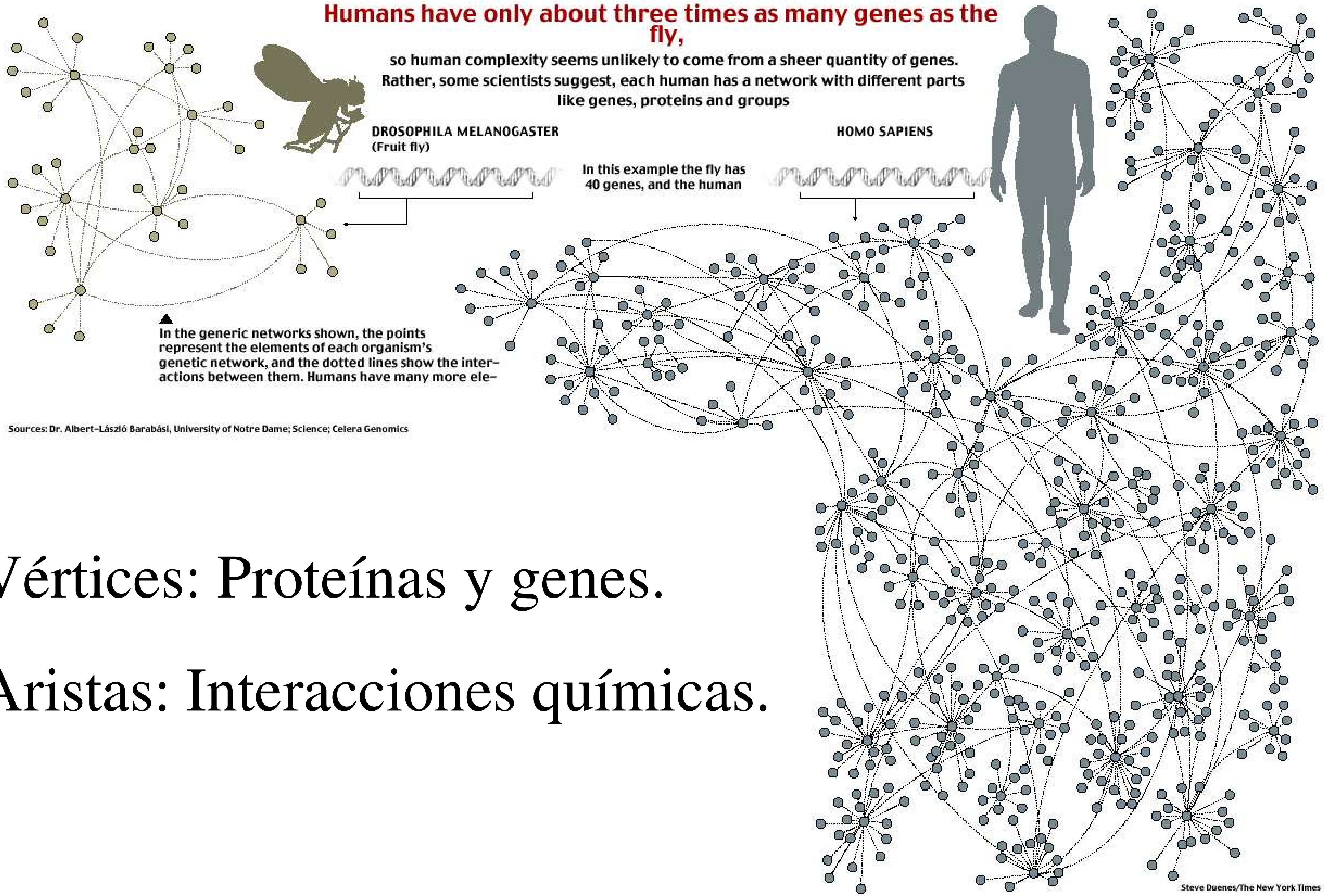
Redes Complejas

interacciones



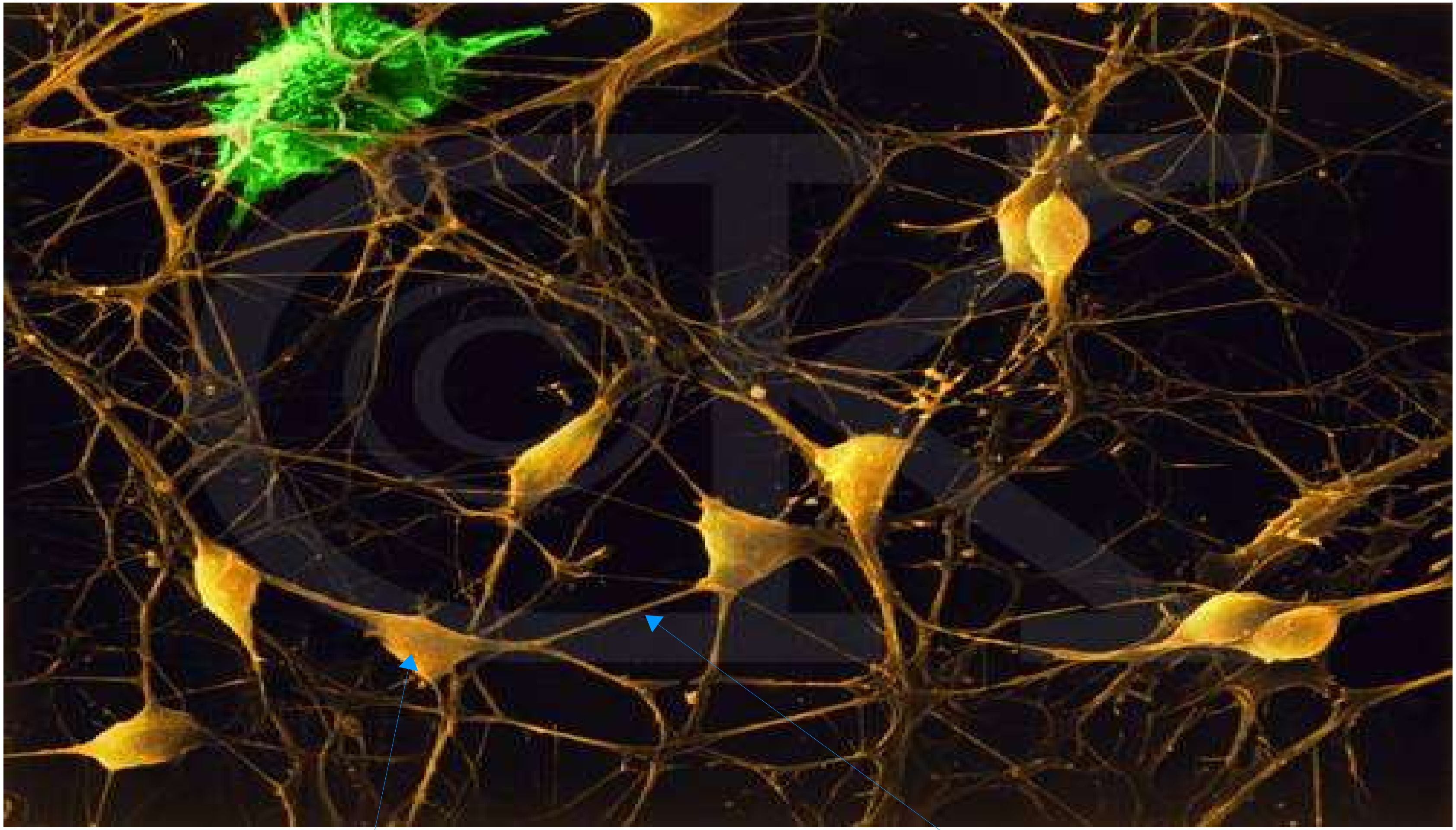
elementos

Red Genetica



- Vértices: Proteínas y genes.
- Aristas: Interacciones químicas.

Sistema Nervioso

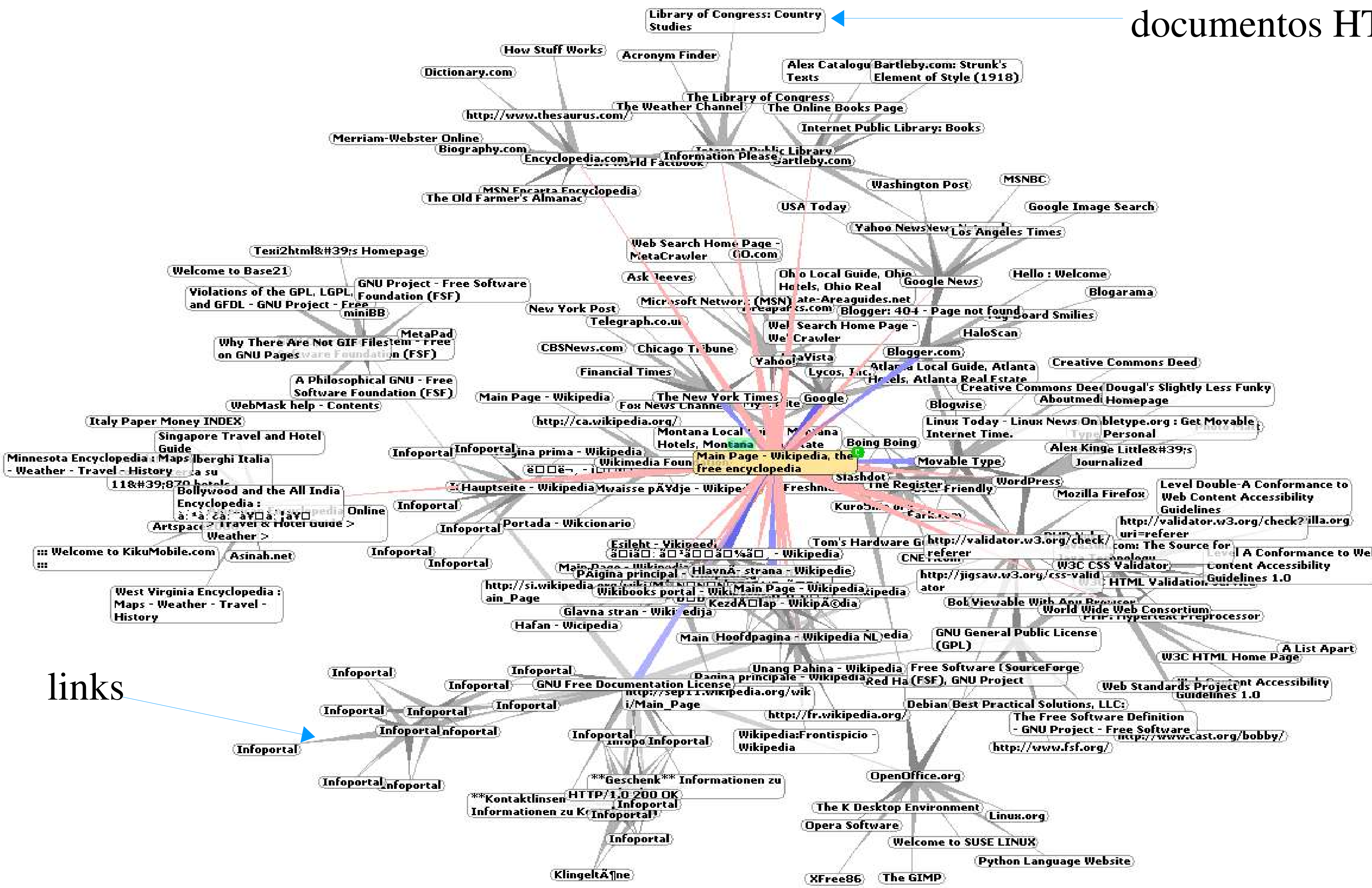


células nerviosas

axones

World Wide Web

documentos HTML

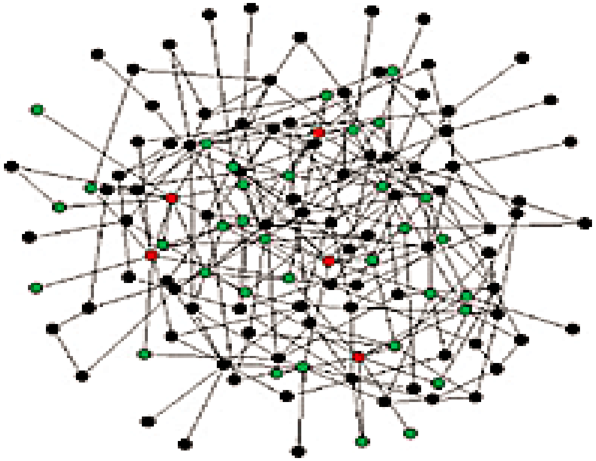


links

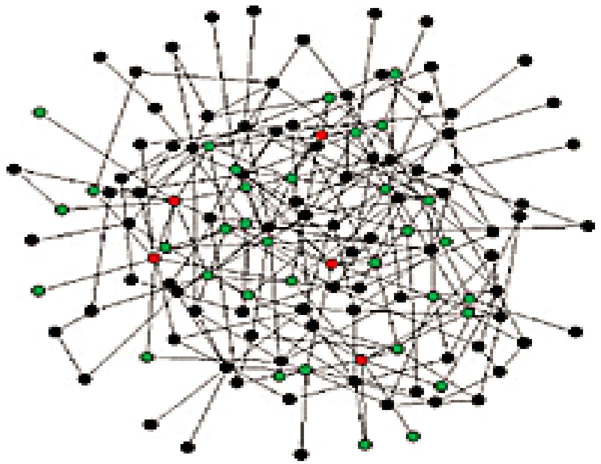
Gráficas Aleatorias

- Una gráfica aleatoria es una colección de puntos (vértices), con lineas (aristas), uniendo pares de ellos de manera aleatoria.

Con mayor numero de aristas. Conectados a 27% de toda la red.



Gráficas Aleatorias (cont)



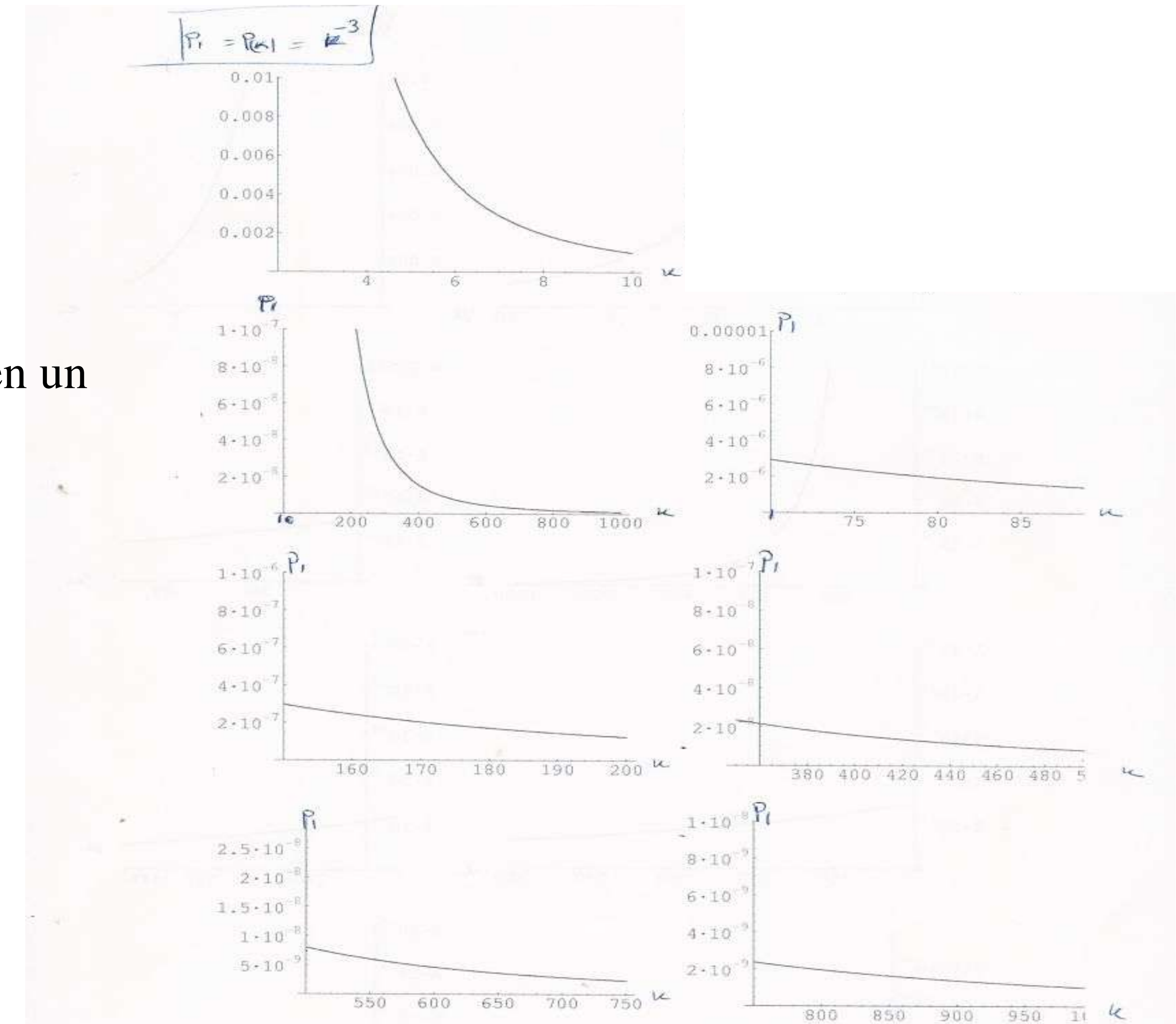
Gráfica Aleatoria

Teoría Erdős y Rényi

Información de redes reales

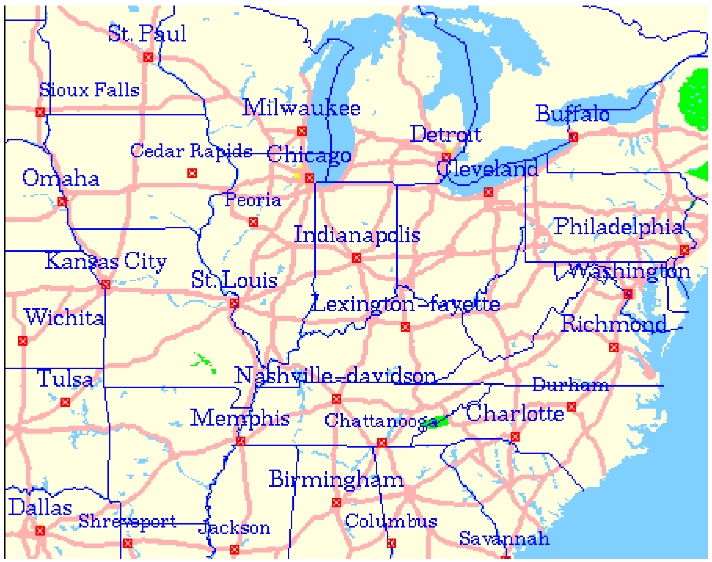
Ley de Potencia

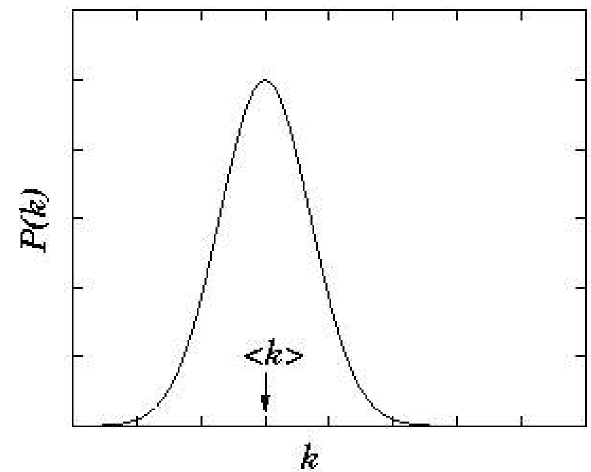
- Barabási y Albert, 1999.
- Independiente del sistema $P(k) \sim k^{-\gamma}$.
- Redes se auto-organizan en un estado de *escala libre*.



Red Exponencial vs Escala Libre

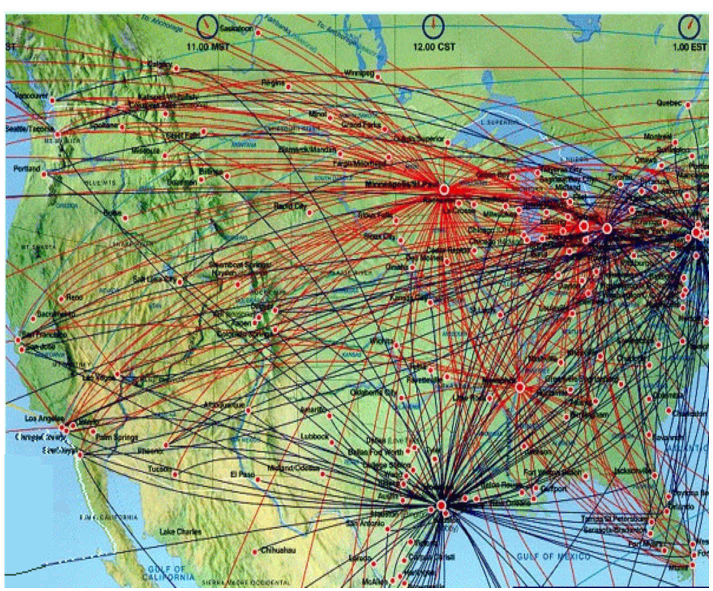
Red Exponencial

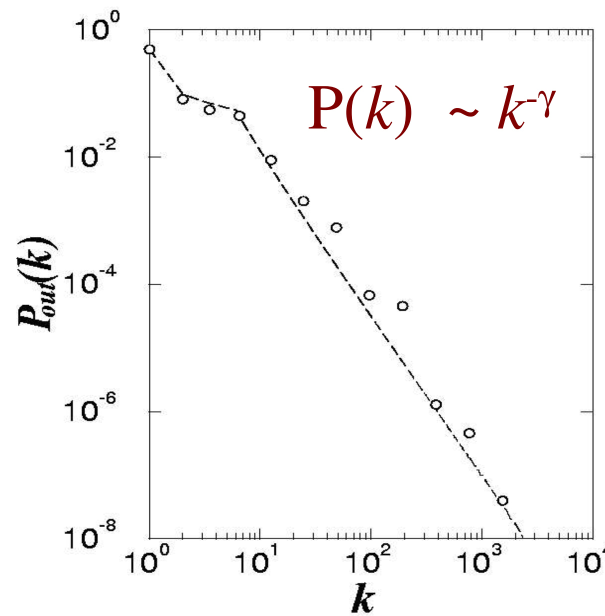




Esperado

Red de Escala Libre





Encontrado

Experimento 1

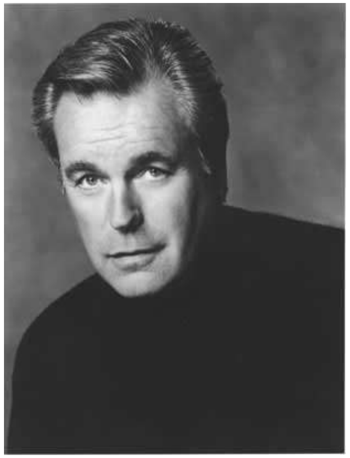
IMDb Internet Movie Database

Charles Chaplin

Monsieur Verdoux

Barry Norton

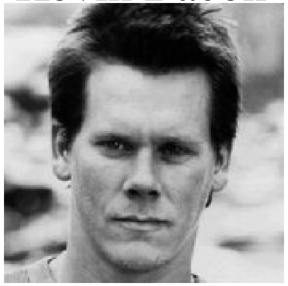
What Price Glory



Robert Wagner

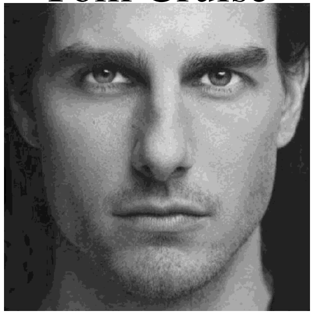
Wild Things

Kevin Bacon



A Few Good Men

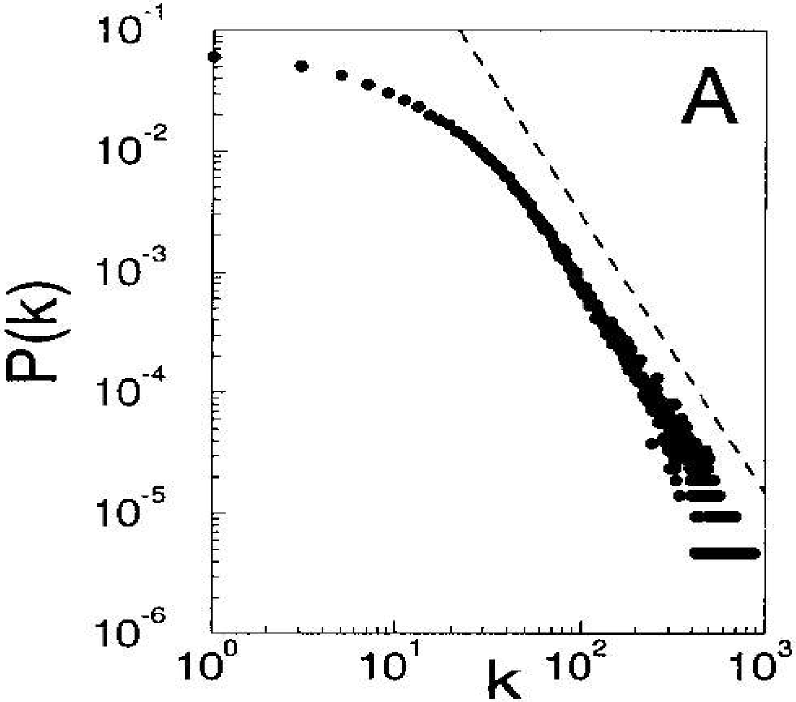
Tom Cruise



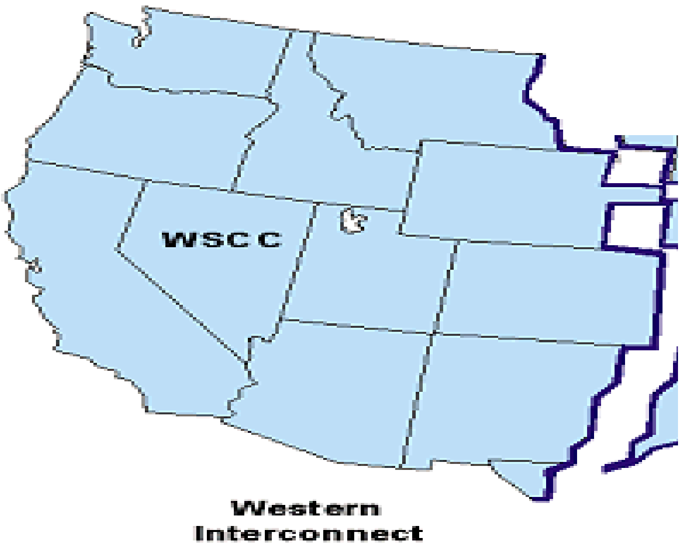
Red de colaboración de actores.

Experimento 1 (cont.)

- Con $N=212{,}250$ vértices y una conectividad promedio $\langle k\rangle=28.78$.
- $P(k) \sim k^{-\gamma actor}$ *con* $\gamma_{actor}=2.3\pm0.1$.



Experimento 2



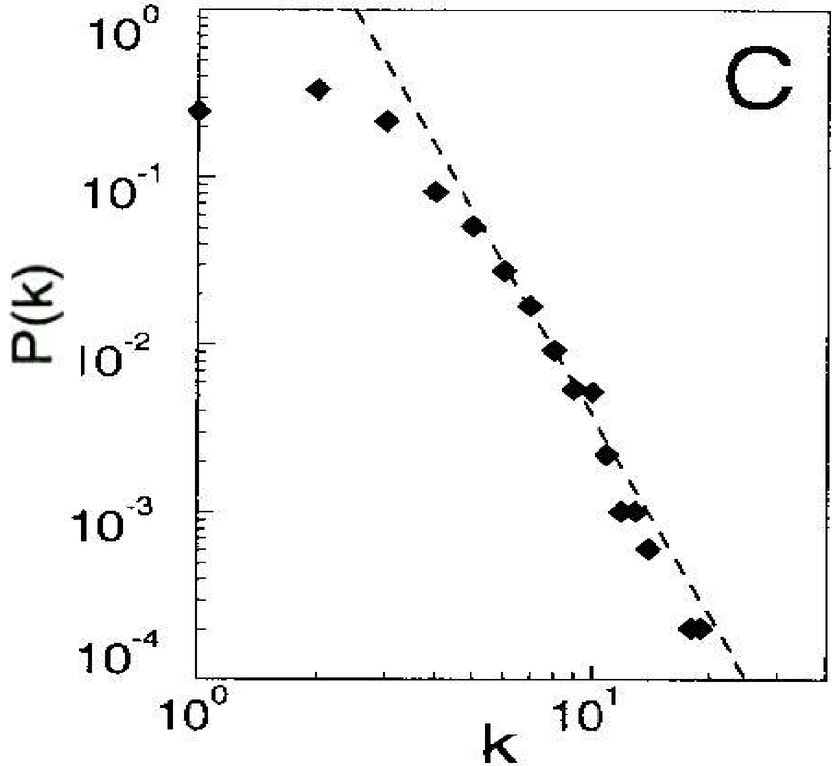
Red electrica del
Occidente de EUA.

Vértices:
- Generadores.
- Transformadores.
- Subestaciones.

Aristas:
- Líneas de transmisión de alto voltaje.

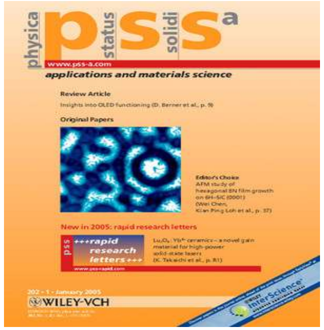
Experimento 2 (cont)

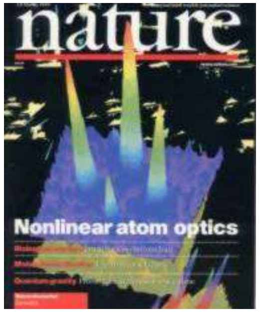
- Con $N=4941$ vértices y una conectividad promedio $<k>=2.67$.
- $P(k) \sim k^{-\gamma power}$ *con* $\gamma_{power} \approx 4$.

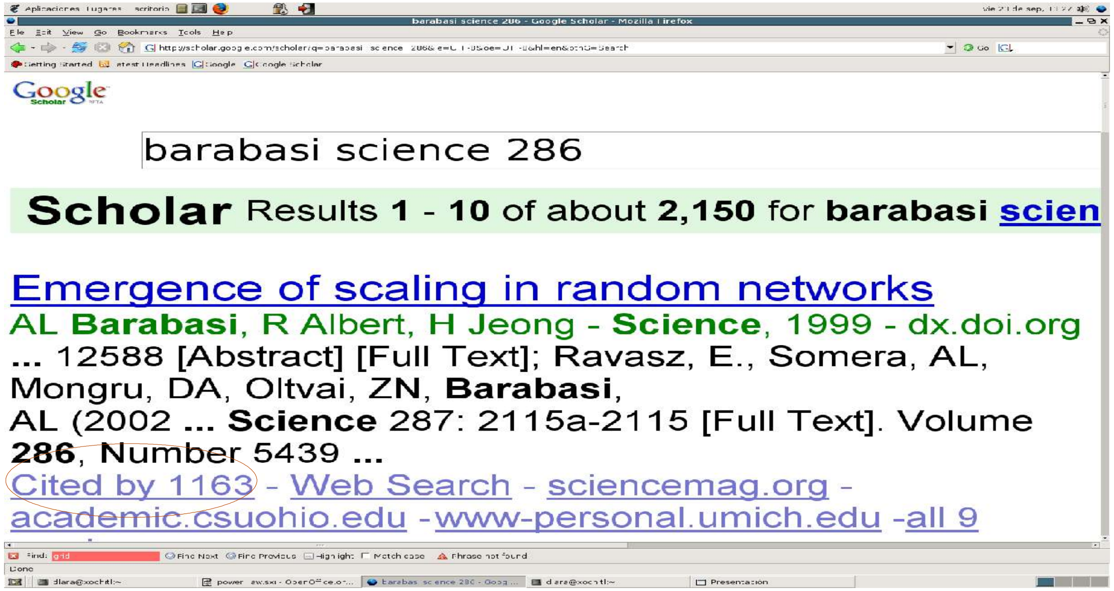


Experimento 3

Red de referencias en publicaciones científicas.







Vértices:

- Artículos publicados en revistas.

Aristas:

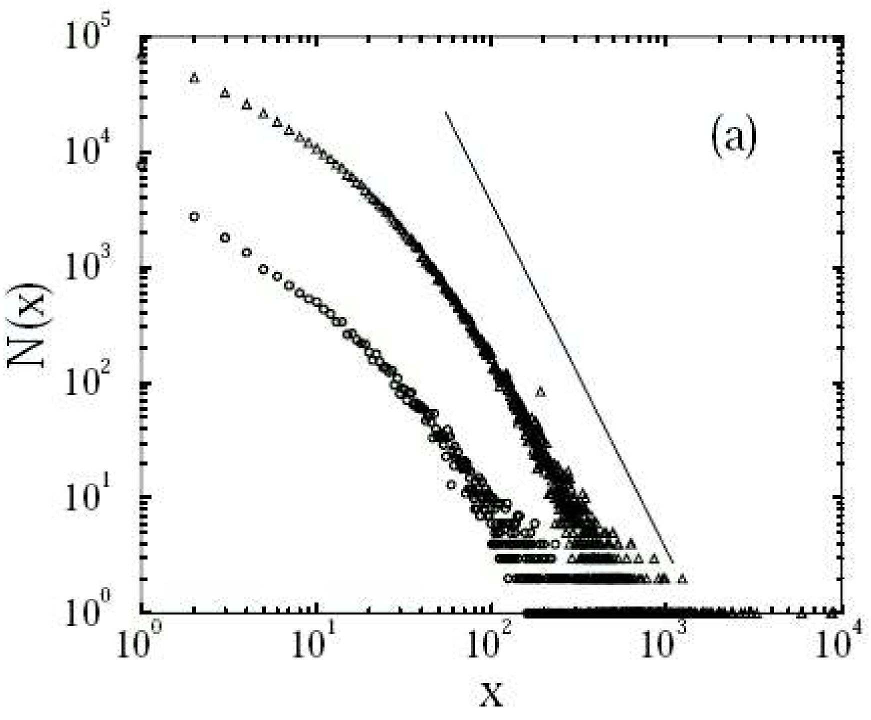
- Links a los artículos citados en algún otro.

Experimento 3 (cont)

- Fue demostrado por S. Redner (1998).
- $P(k) \sim k^{-\gamma cite}$ *con* $\gamma_{cite}=3$.
- Con

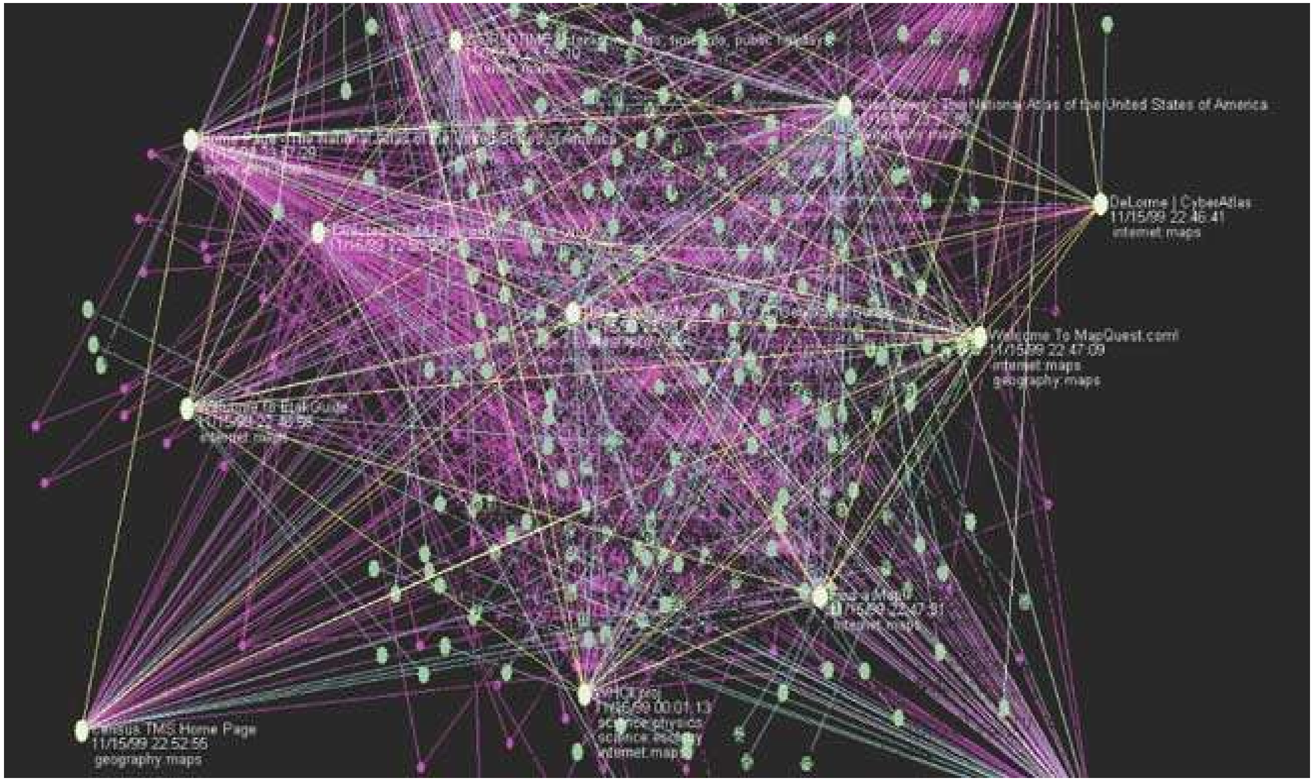
  $N=783{,}339$ ISI.

  $N=24{,}296$ PRD.



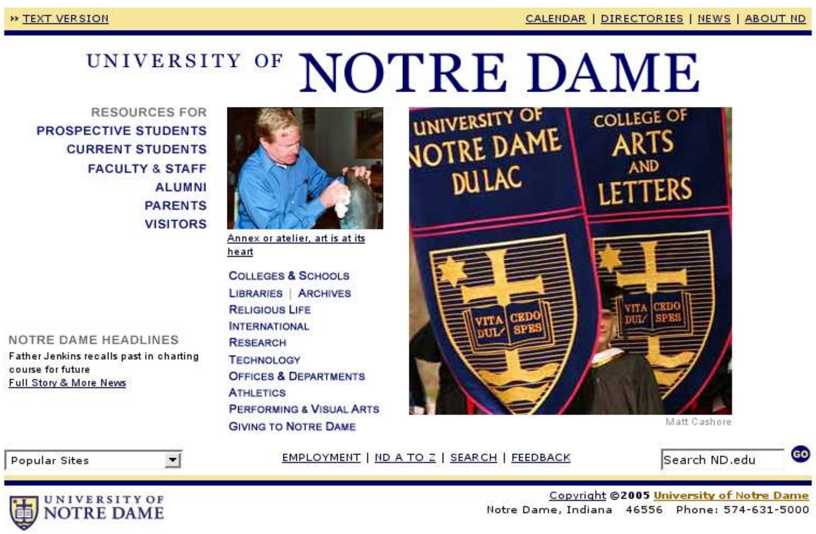
Experimento 4

World Wide Web.



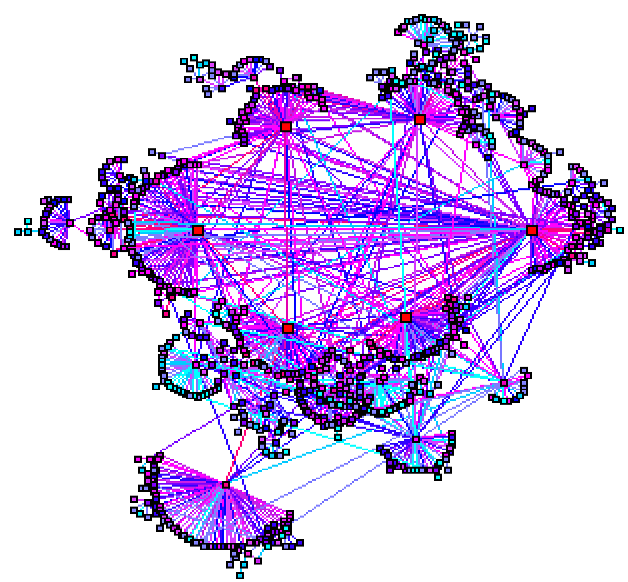
- Gráfica dirigida.
- Medio menos controlado.
- Tamaño estimado en 1999, 8×10^{8} documentos.
- ¿Qué importancia tiene estudiar su topología?

WWW



Robot: Añade a su base de datos todos los URLs encontrados en un documento, y los sigue recursivamente.

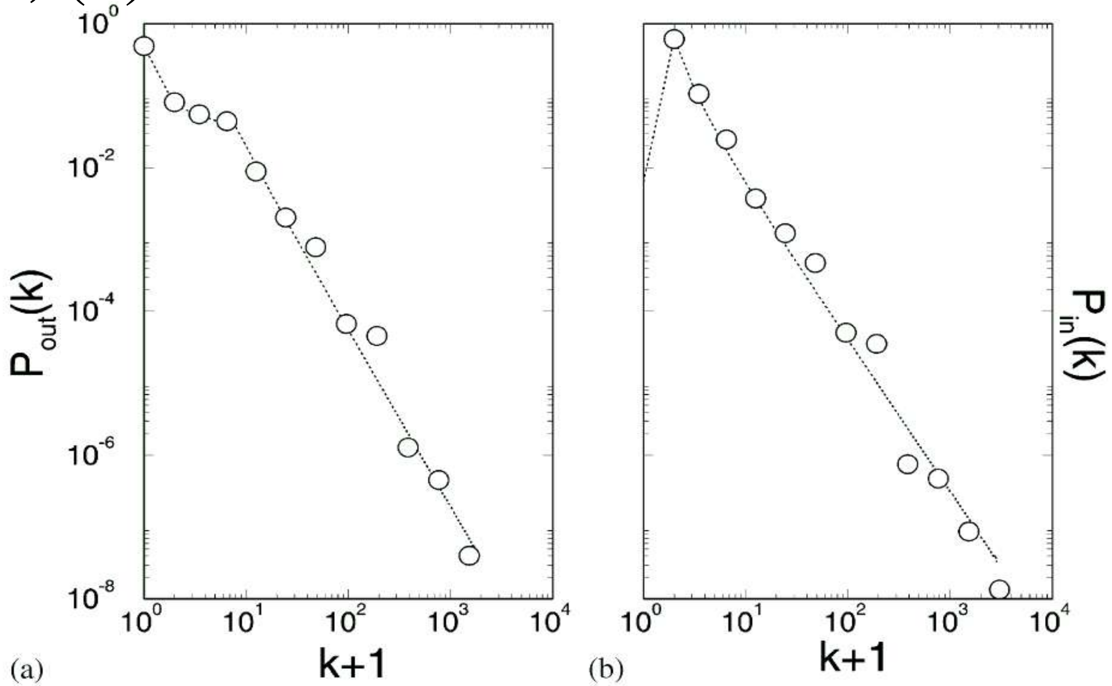
Dominio: *nd.edu* con *325,729* documentos y *1,469,680* links.



R. Albert, H. Jeong, A-L Barabasi, *Nature*, **401** 130 (1999).

WWW(cont)

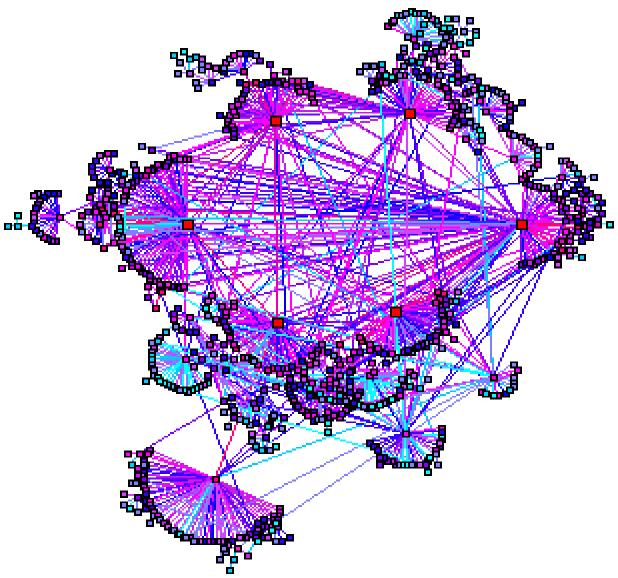
- Determinaron que
  - $P_{out}(k) \sim k^{-\gamma out}$ con γ_{out}=2.5 y
  - $P_{in}(k) \sim k^{-\gamma in}$ con γ_{in}=2.1
- Figura (a) links de salida, (b) links de entrada.



Diecinueve Grados de Separación

Crearon una grafica con N nodos, siguiendo

$P_{out}(k) \sim k^{-2.5}$ $P_{in}(k) \sim k^{-2.1}$



Se encontró $\langle l \rangle = 0.35+2.06\log(N)$

Donde $\langle l \rangle$ es el camino mas corto entre dos documentos.

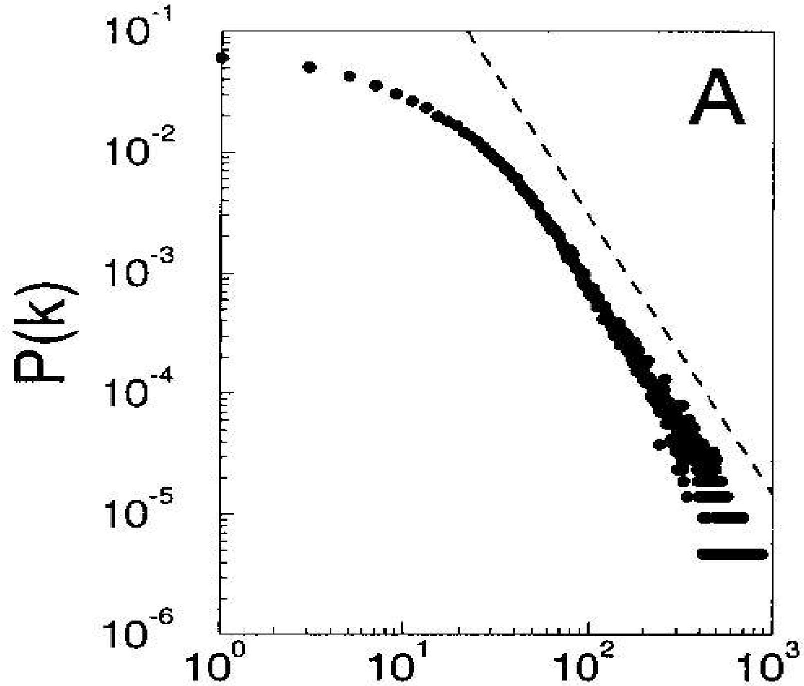
Usando $N=8\times 10^8$, se tiene que

$\langle l_{www} \rangle = 18.59$

Al aumentar N en 1000%, $\langle l \rangle$ cambia de 19 a 21

¿Buscadores?

¿Cuál es el mecanísmo que lleva a este tipo de comportamiento?



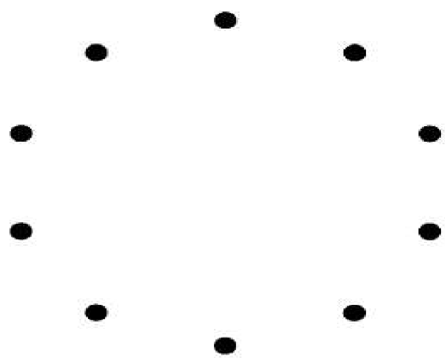
¿Qué sigue?

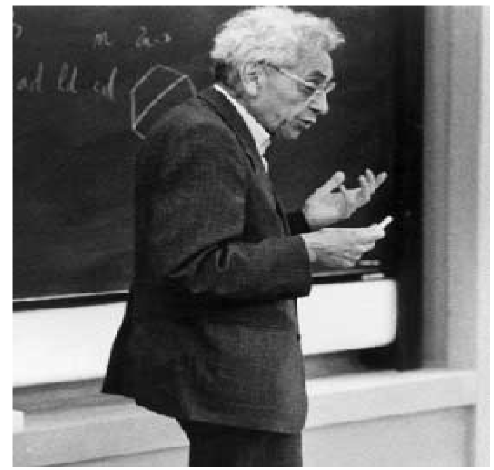
1) Revisar dos modelos anteriores.
2) Presentar modelo de escala libre y dos casos limitados.
3) Presentar una red de escala libre determinista.
4) Conclusiones.

Modelo Erdős-Rényi (ER)

- "*On Random Graphs*", 1959

$p_{ER}=0$





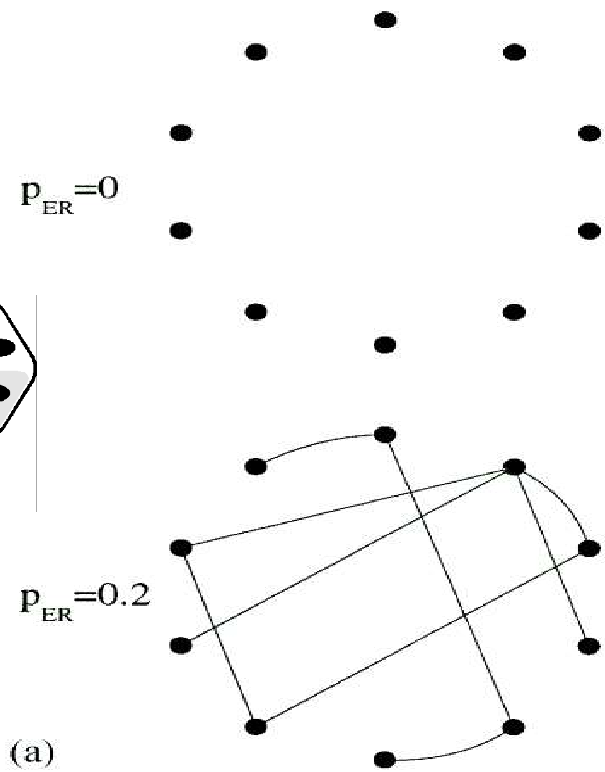
Paul Erdős

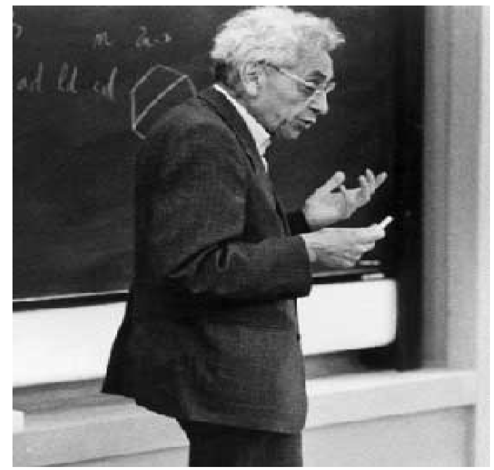
Alfréd Rényi

- *N* fijo

Modelo Erdős-Rényi (ER)

- "*On Random Graphs*", 1959





Paul Erdős

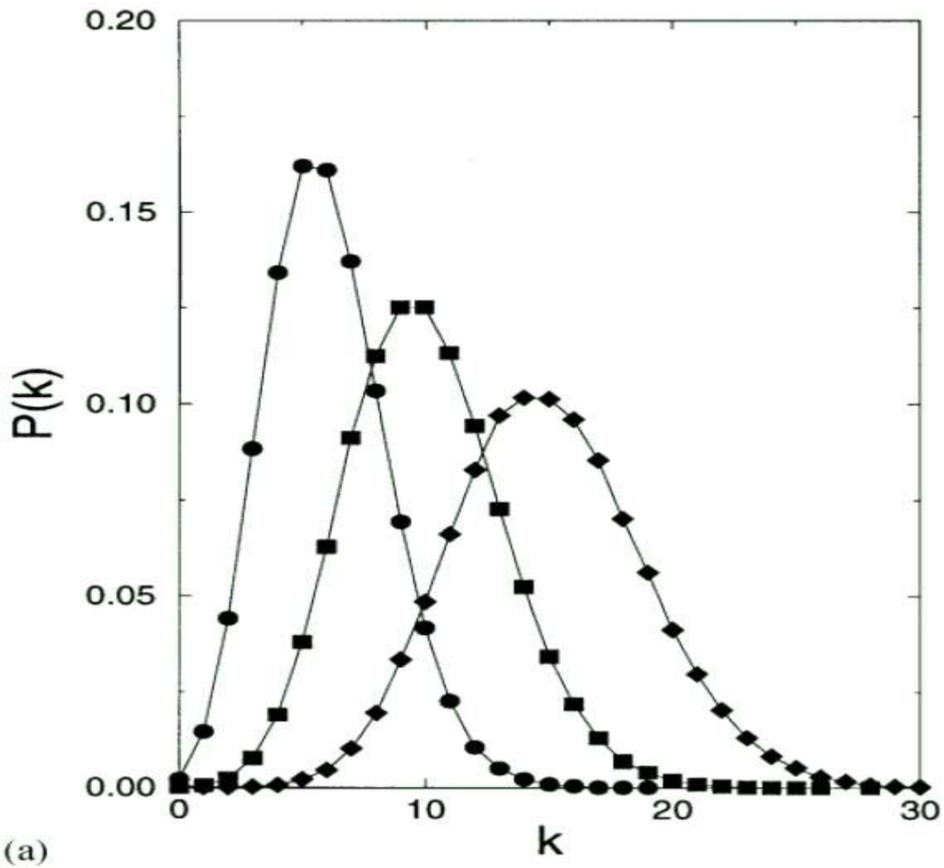
Alfréd Rényi

- N fijo
- Conectar con probabilidad p_{ER}

Modelo Erdős-Rényi (cont)

- *P(k)* sigue una distribución de Poisson.

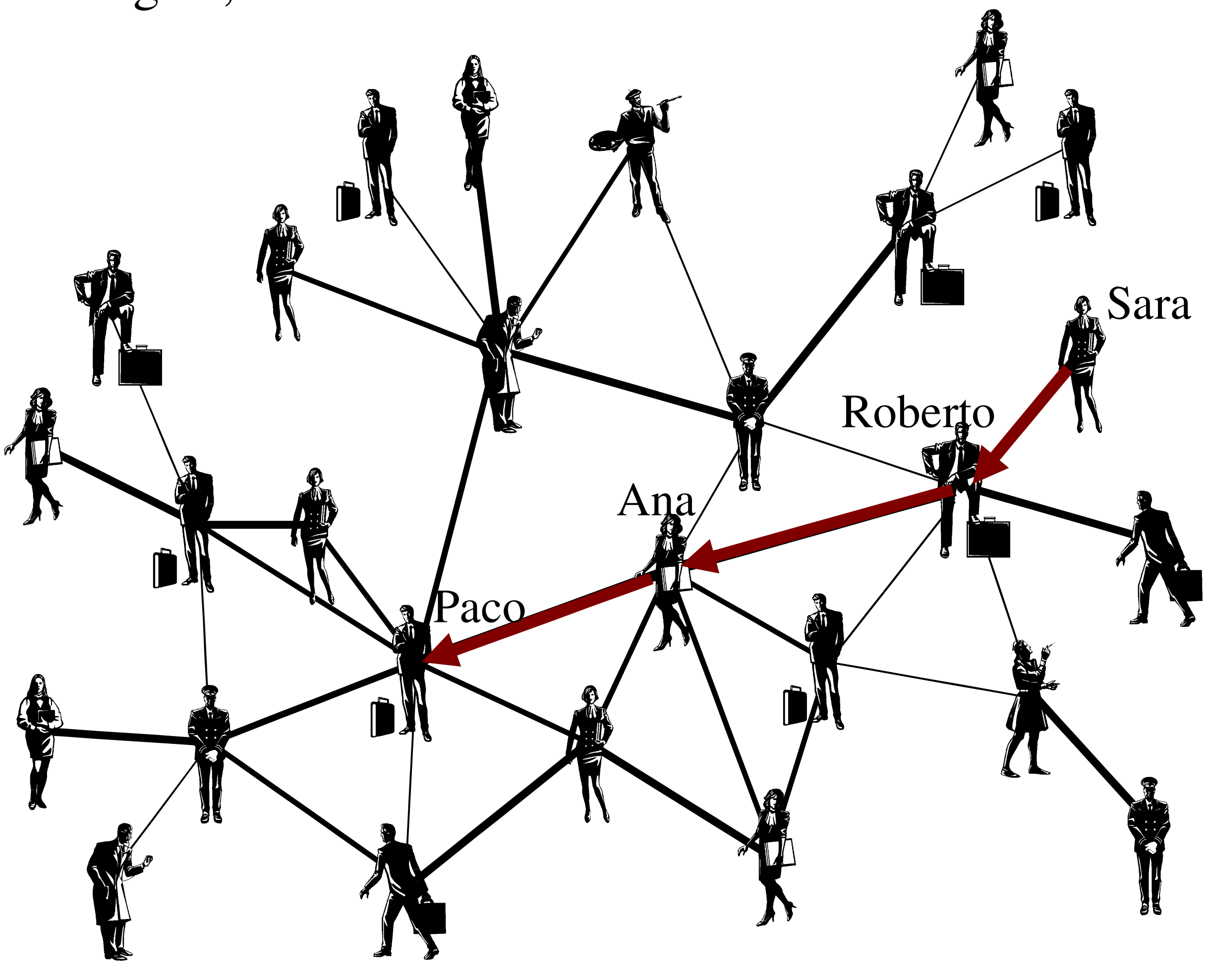
$P(k) \sim e^{-\lambda}\lambda^{k}/k!$



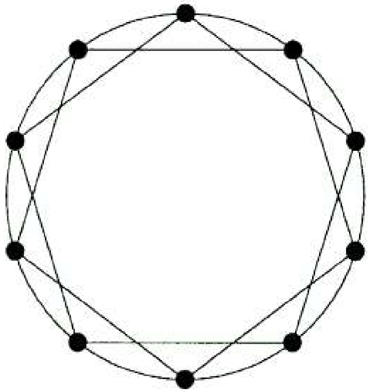
N=10,000.● p_{ER}=*0.0006*, ■p_{ER}=*0.001*,◆ p_{ER}=*0.0015*.

Modelo “Small-World” (WS)

- D.J. Watts y S. H. Strogatz, 1998



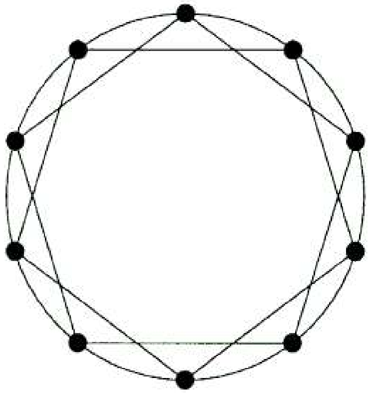
Modelo "Small-World" (cont)



- *N* vértices forman una malla unidimensional, donde cada vertice es conectado a su vecino mas cercano y siguiente mas cercano.

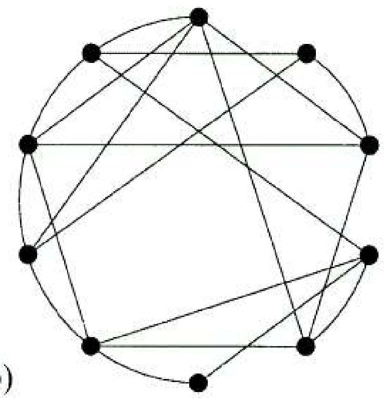
Con $p_{ws}=0$, tiene $2N=20$ aristas.

Modelo "Small-World" (cont)



- N vértices forman una malla unidimensional, donde cada vertice es conectado a su vecino mas cercano y siguiente mas cercano.

Con $p_{ws}=0$, tiene $2N=20$ aristas.



(b)

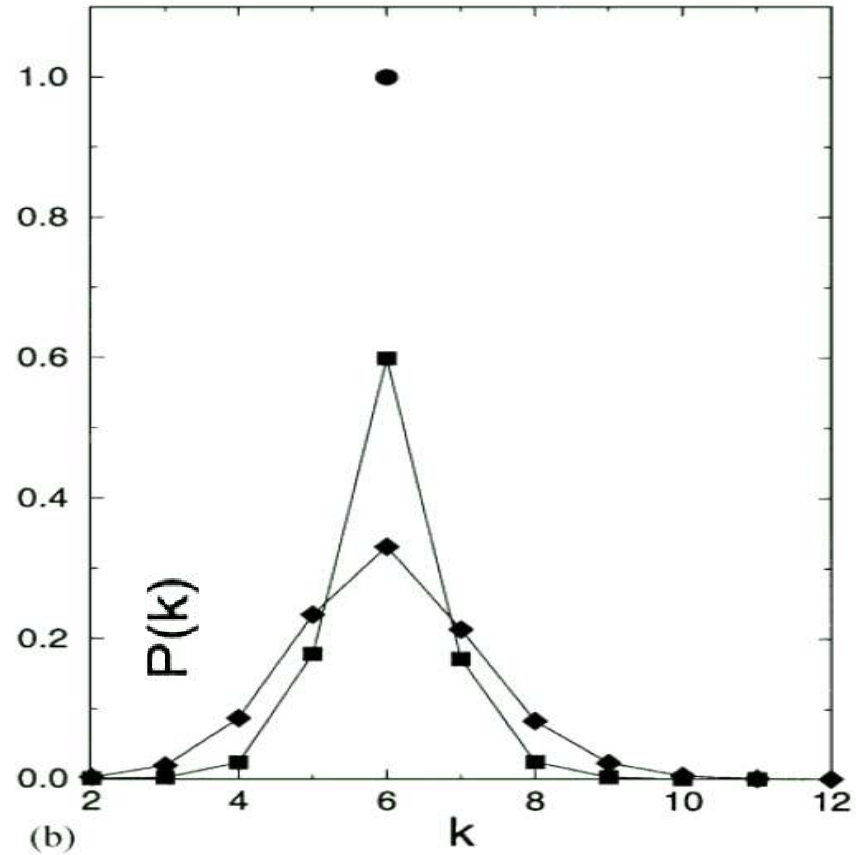
- Con probabilidad p_{ws} cada arista es reconectada con otro vertice aleatoriamente.

Con $p_{ws}=0.3$, $2p_{ws}N=6$ aristas reconectadas.

Modelo “Small-World” (cont)

- *Con* p_{WS}*=0, P(k)* sigue una distribución tipo Delta.

$$P(k) \sim \delta(k - \langle k \rangle)$$



N=10,000.<k>=6.● $p_{WS}=0$, ■$p_{WS}=0.1$,◆ $p_{WS}=0.3$.

Resúmen de Modelos

Modelos ER y WS.

Redes Reales.

Probabilidad de encontrar vértice con muchas conecciones.

Decrese exponencialmente con k.

Grande

Modelo de Escala Libre (Barabási y Albert)

Modelos ER y WS.	Redes Reales.
Asumen N fija	N crece con tiempo vida
Probabilidad dos vértices se conecten es: aleatoria y uniforme.	*Conexión preferencial.*

Modelo basado en crecimiento y conexión lleva a la distribución de escala libre observada.

Crecimiento

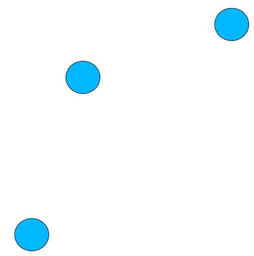
- Se agregan vértices a la red de la siguiente manera:
  - Se empieza con un numero pequeño de vértices m_0.
  - Cada tiempo t se agrega <u>un</u> nuevo vertice con $m(\leq m_0)$ aristas, que ligan el nuevo vertice con m vértices en la red.

Conexión Preferencial

- Los vértices son conectados de acuerdo a lo siguiente:
  - La probabilidad Π de que un nuevo vertice se conecte con un vertice v_i, depende de la conectividad k_i de v_i.
  - $\Pi(k_i)=k_i/\Sigma_j k_j$.

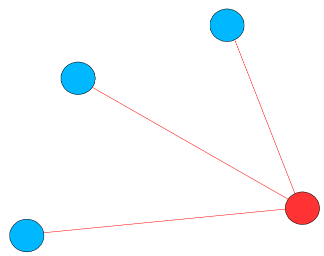
Ejemplo

- Sea $m_0=3$ y $m=3$



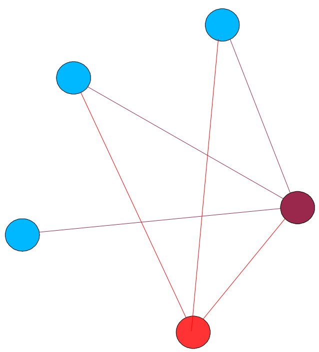
Ejemplo

- Sea $m_0=3$ y $m=3$



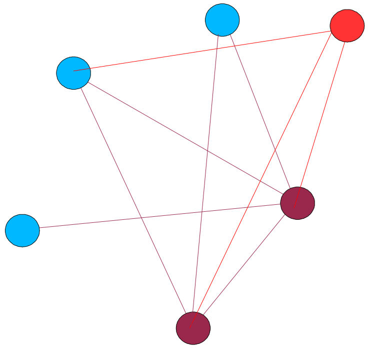
Ejemplo

- Sea $m_0=3$ y $m=3$



Ejemplo

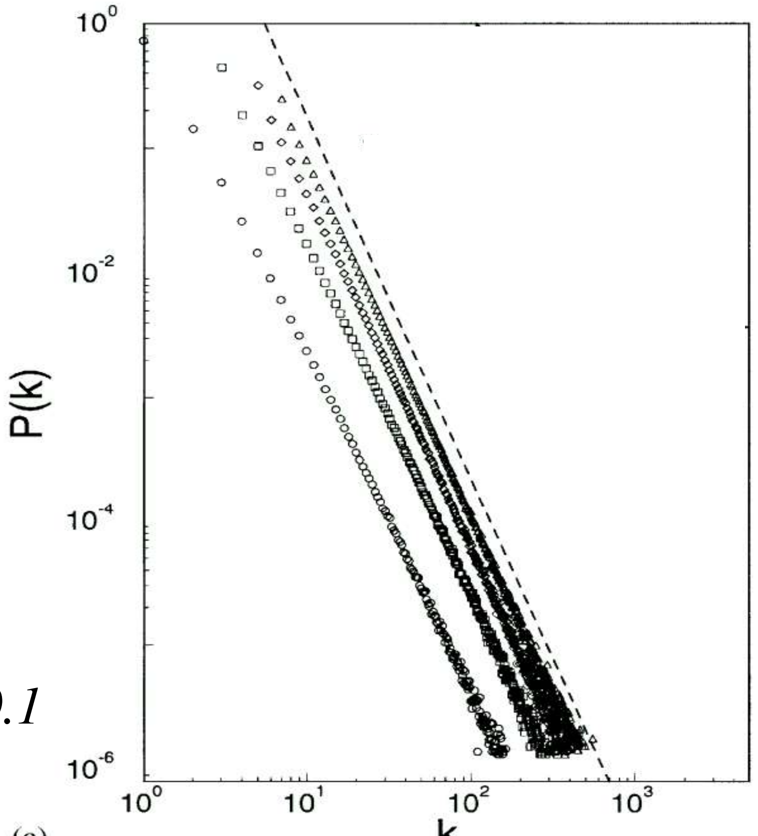
- Sea $m_0=3$ y $m=3$



Resultados

- Despues de *t* pasos, el modelo llega a una red aleatoria con $N=t+m_0$ vértices y *mt* aristas.

- Figura, $N=300{,}000$,
  - ● $m_0=m=1$,
  - ■ $m_0=m=3$,
  - ◆ $m_0=m=5$,
  - ▲ $m_0=m=7$.
- La pendiente de la linea punteada es $\gamma_{model}=2.9\pm0.1$



(a)

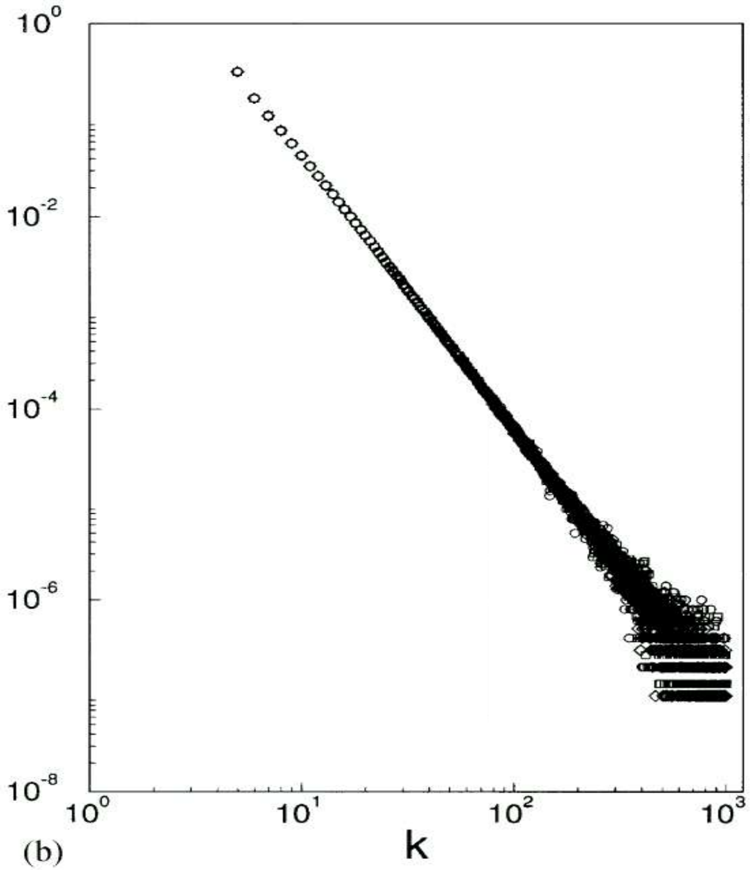
Resultados (cont)

- La ley de potencia observada para las redes reales describe sistemas de gran variedad de tamaños y en diferentes estados de su crecimiento.
- Un modelo correcto deberia ser independiente del tiempo.

Resultados (cont)

- $P(k)$ es independiente del tiempo, en consecuencia, independiente de $N=t+m_0$.

- Figura, $m_0=m=5$
  - ● $N=100{,}000$,
  - ■ $N=150{,}000$,
  - ◆ $N=200{,}000$.



Dos ingredientes(Modelo BA):

1. Crecimiento.
2. Conexión preferencial.

Modelo A:

1. Crecimiento.
2. ~~Conexión preferencial.~~

Modelo B:

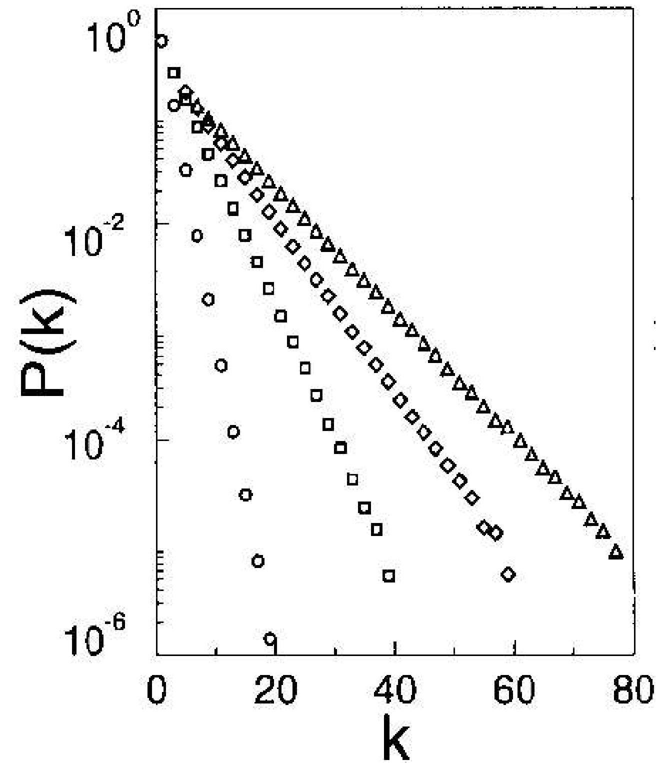
1. ~~Crecimiento.~~
2. Conexión preferencial.

Modelo A

- El crecimiento se hace como en el modelo BA.
- La conexión preferencial se elimina, asumiendo que un nuevo vertice se conecta, con igual probabilidad, a cualquier vertice del sistema.
  - $\Pi(k) = const = 1/(m_0+t-1)$

Modelo A (cont)

- Presenta $P(k) \sim exp(-(\mathbf{1/m})k)$
- i.e. se elimina la propiedad de escala libre.
- Figura, $N=800,000$
  - ● $m_0=m=1,$
  - ■ $m_0=m=3,$
  - ◆ $m_0=m=5,$
  - ▲ $m_0=m=7$



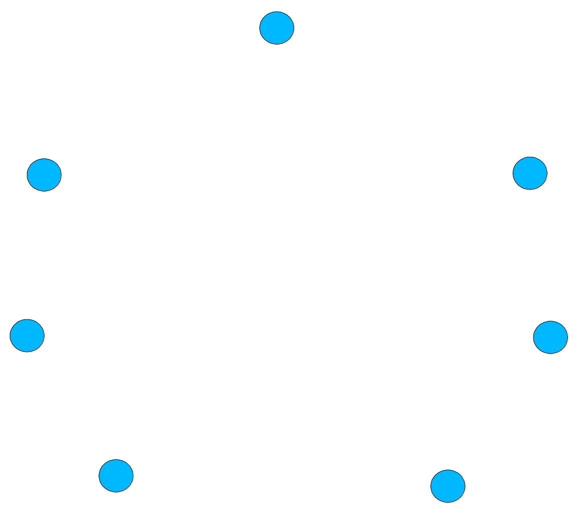
Modelo B

- Prueba la hipótesis de que el crecimiento es escencial para que se presente la característica de escala libre observada.
- Se empieza con N vértices y ninguna arista.
- En cada paso, se selecciona un vertice de manera aleatoria y se conecta con probabilidad $\Pi(k_i) = k_i / \Sigma_j k_j$ a un vertice i en el sistema.

Modelo B (cont)

- Ejemplo. $N=7$.

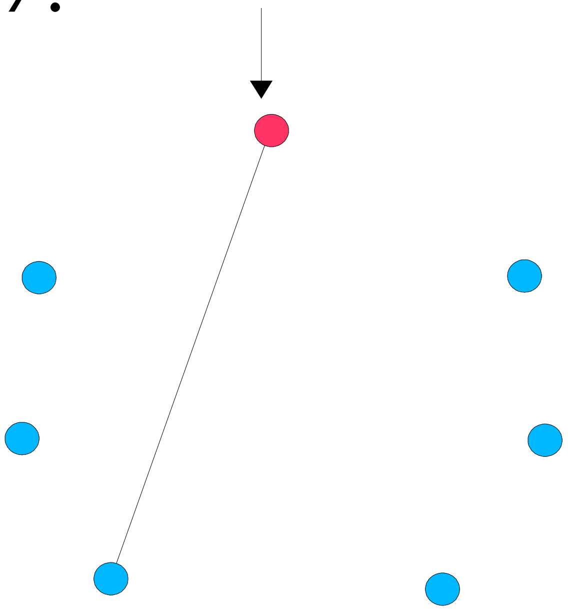
$t=0$



Modelo B (cont)

- Ejemplo. *N=7*.

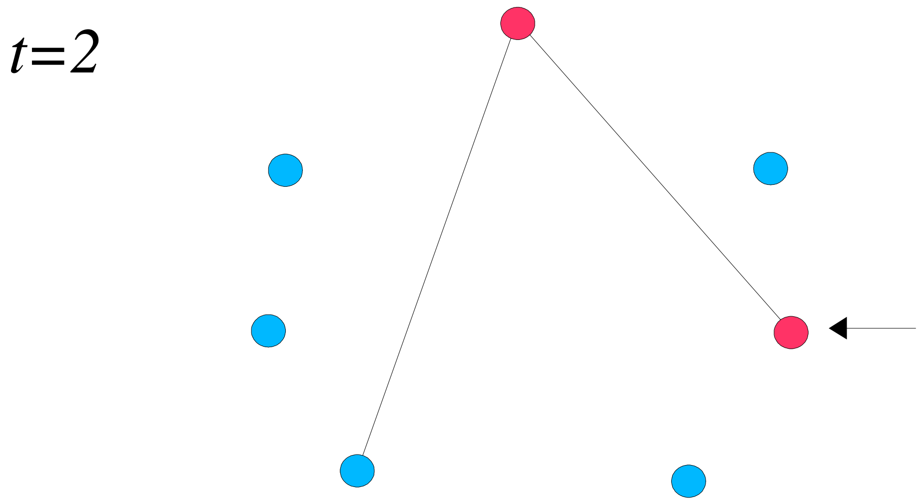
t=1



$$\Pi(k_i) = k_i / \Sigma_j k_j$$

Modelo B (cont)

- Ejemplo. N=7.

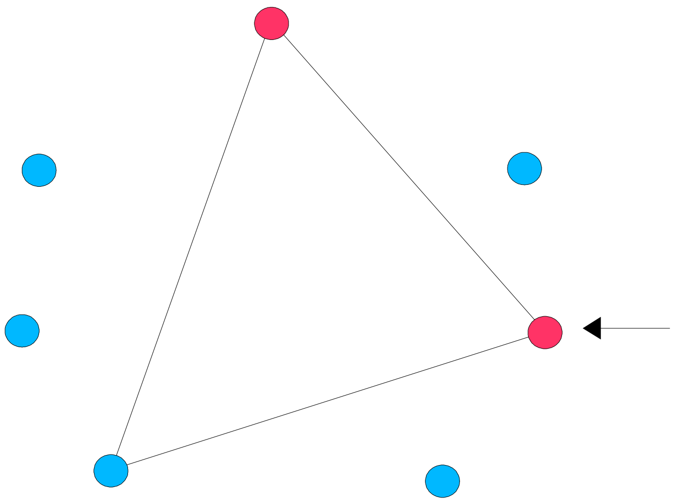


$$\Pi(k_i) = k_i / \Sigma_j k_j$$

Modelo B (cont)

- Ejemplo. $N=7$.

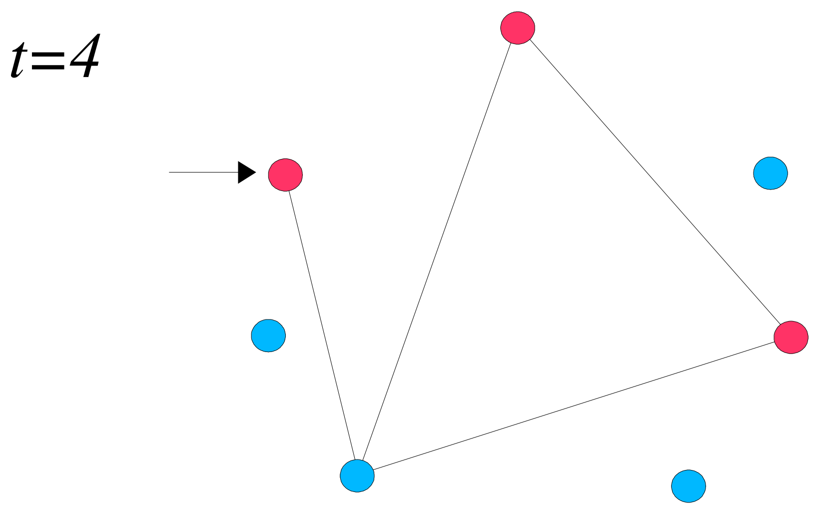
$t=3$



$$\Pi(k_i) = k_i / \Sigma_j k_j$$

Modelo B (cont)

- Ejemplo. $N=7$.

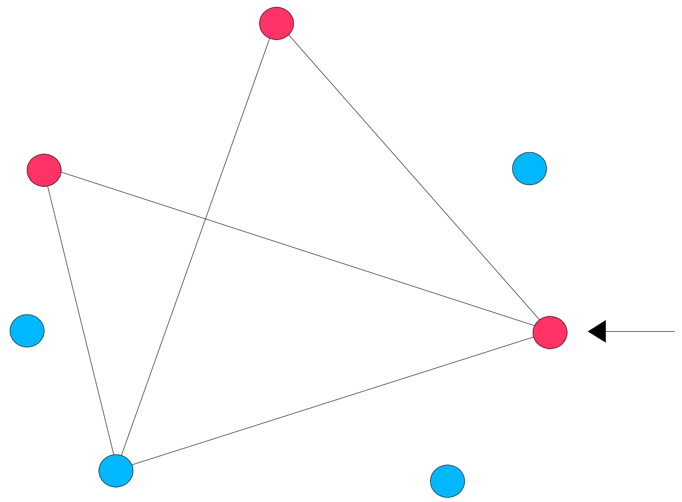


$$\Pi(k_i) = k_i / \Sigma_j k_j$$

Modelo B (cont)

- Ejemplo. $N=7$.

$t=5$

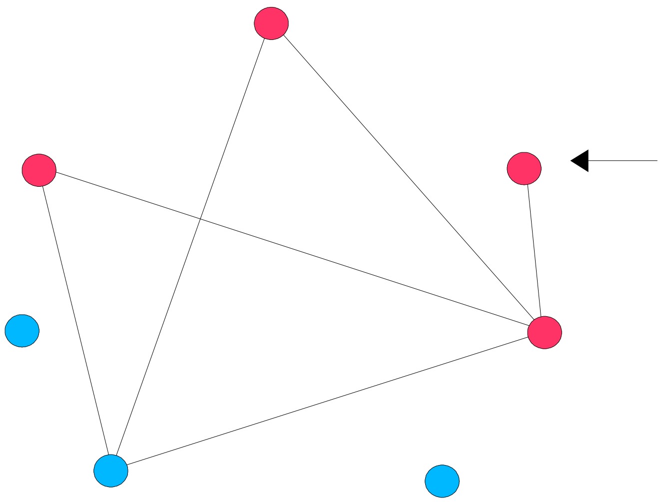


$$\Pi(k_i) = k_i / \Sigma_j k_j$$

Modelo B (cont)

- Ejemplo. $N=7$.

$t=6$

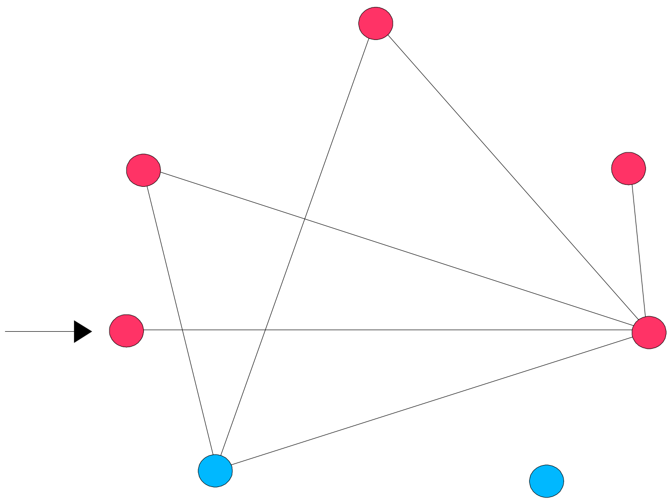


$$\Pi(k_i) = k_i / \Sigma_j k_j$$

Modelo B (cont)

- Ejemplo. $N=7$.

$t=7$

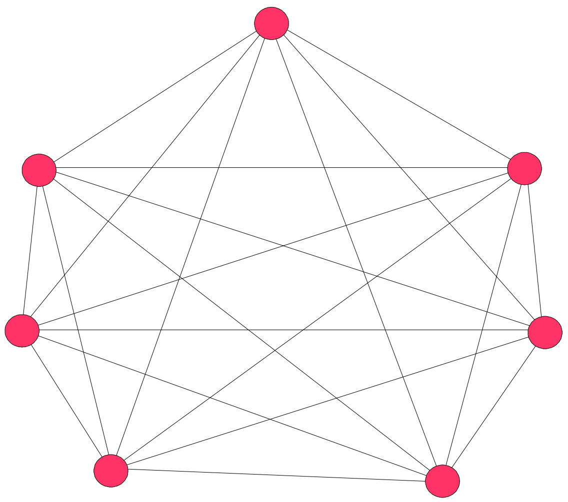


$$\Pi(k_i) = k_i / \Sigma_j k_j$$

Modelo B (cont)

- Ejemplo. $N=7$.

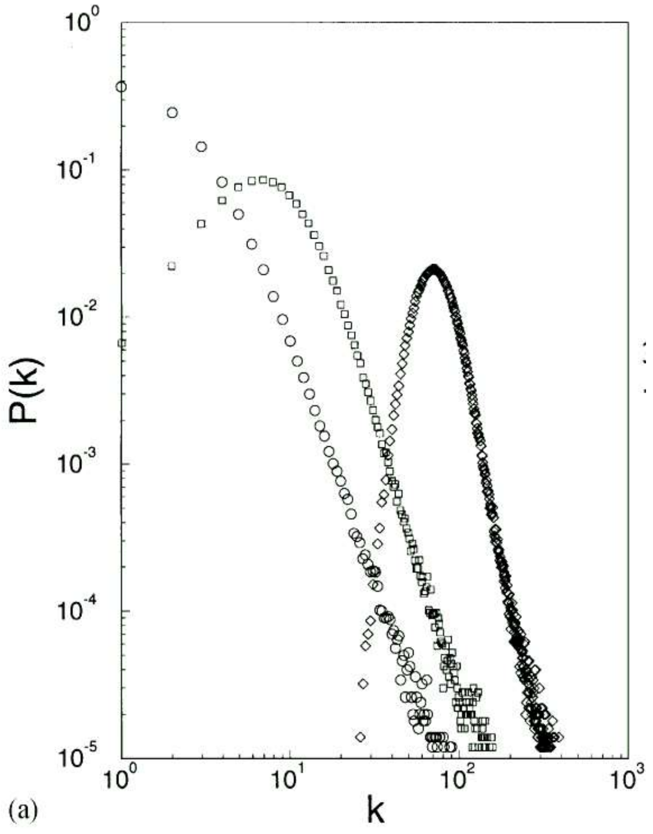
$t \approx N^2$



$$\Pi(k_i) = k_i / \Sigma_j k_j$$

Modelo B (cont)

- $P(k)$ se comporta como una Gaussiana.
- Figura, $N=10{,}000$
  - ● $t=N$,
  - ■ $t=5N$,
  - ◆ $t=40N$.



(a)

Resultado

- Ambos, crecimiento y conexión preferencial, son necesarios para el desarrollo de la distribución de ley de potencia (estacionaria) observada en los experimentos.

Dos ingredientes(Modelo BA):

1. Crecimiento.
2. Conexión preferencial.

¿Qué sigue?

1) Revisar dos modelos anteriores.

2) Presentar modelo de escala libre y dos casos limitados.

3) Presentar una red de escala libre determinista.

4) Conclusiones.