

# Tres Problemas de Iluminación y Visibilidad

Jorge Urrutia \*

Department of Computer Science

University of Ottawa

Ottawa, Ontario, Canada

## Resumen

En este artículo, estudiaremos dos problemas de iluminación y uno de gráficas de visibilidad. Comenzaremos por probar que para todo polígono simple en el plano, el número de aristas estrictamente internas más el número de aristas estrictamente externas es al menos  $\lceil \frac{3n-1}{2} \rceil - 4$ , lo cual resuelve una conjetura de Bagga. A continuación, daremos una prueba nueva de el Teorema de Galerías de Arte Ortogonales que afirma que todo polígono ortogonal con  $n$  vértices siempre se puede iluminar con a lo más  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  guardias. También estudiaremos el problema de los tres reflectores, definido de la siguiente manera: Supongamos que tenemos tres ángulos  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  tales que  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$ , y sea  $P$  un polígono convexo. Entonces siempre podemos colocar tres reflectores de tamaño a lo más  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  sobre vértices de  $P$  de tal forma que  $P$  quede totalmente iluminado.

## 1. Introducción

Los problemas de iluminación, o de vigilancia de objetos en el plano, han sido muy estudiados en los últimos años. Problemas de iluminación de polígonos simples, colecciones de círculos, cuadriláteros, etc. han recibido mucha atención en la literatura. Las fuentes de luz utilizadas para iluminar nuestros objetos pueden ser de varios tipos, lámparas que emiten luz alrededor de ellas, reflectores o fuentes de luz que solo iluminan dentro de una zona angular, etc.

---

\*Partially supported by NSERC of Canada

Intimamente ligado a los problemas de iluminación está el estudio de gráficas de visibilidad. Dado un polígono  $P$  en el plano, la gráfica de visibilidad interna de  $P$  es la gráfica cuyos vértices son los vértices de  $P$ , en la cual dos vértices son adyacentes, si el segmento de línea que los une está totalmente contenido en  $P$ . La gráfica de visibilidad externa se define análogamente, sólo que el segmento (abierto) de recta que une dos vértices tiene que estar contenido en el exterior de  $P$ . Una arista de visibilidad interna (respectivamente externa) se le llama estrictamente interna (respectivamente externa) si esta arista no es una arista de  $P$ .

El lector interesado puede encontrar numerosas referencias a todas las variantes estudiadas hasta hoy en el libro de J. O'Rourke [7], así como en los artículos de carácter bibliográfico de T. Shermer [12] y J. Urrutia [15].

En este artículo estudiaremos dos problemas de iluminación de polígonos y uno de gráficas de visibilidad. Probaremos que para todo polígono simple en el plano, el número de aristas de visibilidad estrictamente internas más el número de aristas de visibilidad estrictamente externas es al menos  $\lceil \frac{3n-1}{2} \rceil - 4$ . Este resultado fue conjeturado por Bagga [9].

A continuación, daremos una prueba sencilla del Teorema de las Galerías de Arte Ortogonales que fue probado inicialmente por Kahn, Klawe y Kleitman [4]. Este resultado afirma que todo polígono ortogonal en el plano puede iluminarse con a lo más  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  lámparas.

Terminaremos estudiando el Problema de los Tres Reflectores. Un  $\alpha$ -reflector es una fuente de luz colocada en un punto  $p$ , llamado el ápice del reflector, que ilumina dentro de una zona angular de tamaño a lo más  $\alpha$ . Diremos que  $\alpha$  es el tamaño del  $\alpha$ -reflector. El problema de los tres reflectores se define de la siguiente manera: Sea  $P$  un polígono convexo y  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$ . Entonces siempre es posible colocar tres reflectores de tamaño  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  y  $\alpha_3$  de tal manera que sus ápices estén colocados sobre los vértices de  $P$ ,  $P$  quede totalmente iluminado y en cada vértice de  $P$  coloquemos a lo más el ápice de un reflector.

## 2. El número de aristas de visibilidad de un polígono

Sea  $int(P)$  y  $ext(P)$  el número de aristas estrictamente internas, y estrictamente externas de  $P$  respectivamente. Nuestro objetivo en esta sección es

probar el siguiente resultado:

**Teorema 2.1** [13] *Para cualquier polígono simple con  $n$  vértices,  $int(P) + ext(P) \geq \lceil \frac{3n-1}{2} \rceil - 4$ .*

La familia de polígonos presentados en la Figura 1 alcanza esta cota.

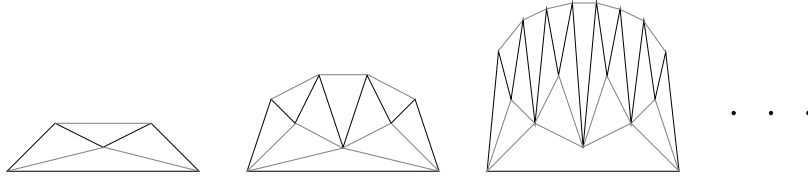


Figura 1: Una serie de polígonos para los cuales el número de aristas estrictamente internas más el número de aristas estrictamente externas es exactamente  $\lfloor \frac{3n-1}{2} \rfloor - 4$ .

Decimos que un vértice de  $P$  es *interno* si éste pertenece al interior del cierre convexo  $Conv(P)$  de  $P$ . Un vértice de  $P$  es *externo*, si es un vértice de  $Conv(P)$ . El número de vértices internos y externos de  $P$  serán denotados respectivamente por  $int(P)$  y  $ext(P)$ .

El siguiente resultado es fácil de probar:

**Lema 2.1** *Sea  $P$  un polígono de  $n$  vértices, con  $k$  vértice internos. Entonces  $ext(P) \geq k$ .*

De ésto se deduce:

**Lema 2.2** *Si  $P$  tiene  $k$  vértices internos, entonces  $int(P) + ext(P) \geq (n - 3) + k$ .*

PRUEBA: Obsérvese que toda triangulación de un polígono con  $n$  vértices tiene exactamente  $n - 3$  aristas. ■

Ahora probaremos:

**Lema 2.3** *Todo polígono con  $k$  vértices internos puede descomponerse en  $k + 1$  polígonos convexos  $P_1, \dots, P_{k+1}$ . Esta descomposición puede obtenerse de tal forma que si  $P_i$  tiene  $n_i$  vértices,  $i = 1, \dots, k + 1$  entonces  $n_1 + \dots + n_{k+1} = n + 3k$ .*

PRUEBA: Para cada uno de los vértices internos  $v$  de  $P$ , dibújese un segmento de línea que bisecte el ángulo interno de  $P$  en  $v$ , y que se extiende hasta intersectar una arista de  $P$  o un bisector previamente dibujado; ver la Figura 2. Observemos que cada vértice interno de  $P$  aparece en exactamente dos subpolígonos convexos de  $P$ , y que los extremos finales de nuestros bisectores también aparecen dos veces en esos polígonos. ■

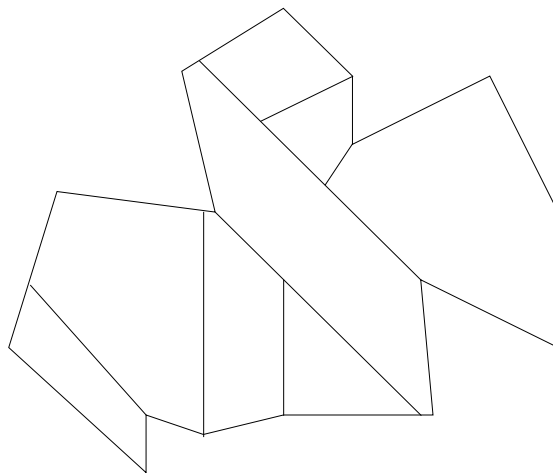


Figura 2: Dividiendo  $P$  en polígonos convexos.

Para cada  $P_i$  en el lema anterior, distinguimos dos tipos de vértices, aquellos que son vértices de  $P$ , que llamaremos vértices *reales*, y aquellos que corresponden a extremos de bisectores que no son vértices de  $P$ . Sea  $P'_i$  el subpolígono de  $P_i$  generado por los vértices reales de  $P_i$ , y sea  $m_i$  el número de vértices de  $P'_i$ . Observemos que si  $m_i \geq 4$ , entonces cualquier arista estrictamente interna de  $P'_i$  intersecta al menos  $m_i - 3$  aristas estrictamente internas de  $P'_i$ . Por tanto tenemos:

**Lema 2.4** *Si  $m_i \geq 4$ , entonces cualquier arista estrictamente interna de  $P_i$  es intersectada por al menos  $m_i - 3$  aristas estrictamente internas de  $P'_i$ .*

Ahora procedemos a probar el Teorema 2.1:

PRUEBA: Supongamos que  $P$  tiene  $k$  vértices internos. Obtengamos una partición de éste en  $k + 1$  polígonos convexos, como en el Lema 2.3. Para cada

$m_i \geq 4$ , tómesese una arista de visibilidad estrictamente interna  $e_i$  de  $P'_i$ ,  $i = 1, \dots, k+1$ . Es fácil ver que siempre existe una triangulación  $T$  de  $P$  que contiene a todas estas aristas. Ahora probaremos que  $int(P) \geq 2n - 2k - 6$ . Por el Lema 2.4, para cada  $m_i \geq 4$ ,  $e_i$  es intersectada por al menos  $m_i - 3$  aristas estrictamente internas de  $P'_i$ . Pero como  $e_i$  pertenece a  $T$ , ninguna de estas aristas pertenece a  $T$ . Notemos que estas aristas son también aristas estrictamente internas de  $P$ . Por tanto tenemos:

$$int(P) \geq (n - 3) + \sum_{m_i \geq 4} (m_i - 3) \geq (n - 3) + \sum_{i=1, \dots, k+1} (m_i - 3)$$

Pero

$$\sum_{i=1, \dots, k+1} (m_i - 3) = n + k - 3(k + 1) = n - 2k - 3$$

(cada vértice interno de  $P$  aparece en dos  $P'_i$ 's y cada vértice en el cierre convexo de  $P$  en uno). Por lo tanto

$$int(P) \geq 2n - 2k - 6$$

Pero por el Lema 2.1, sabemos que  $ext(P) \geq k$ , y por tanto:

$$int(P) + ext(P) \geq 2n - k - 6$$

Por otro lado, por el Lema 2.2 tenemos que

$$ext(p) + int(P) \geq (n - 3) + k$$

Usando ambas ecuaciones obtenemos que  $int(P) + ext(P) \geq \lfloor \frac{3n-1}{2} \rfloor - 4$ , lo cual termina nuestra prueba. ■

### 3. Iluminando polígonos ortogonales

Un polígono simple en el plano se llama ortogonal si sus aristas son paralelas a los ejes coordenados. En esta sección daremos una prueba nueva y sencilla del siguiente resultado, probado originalmente por Kahn, Klawe y Kleitman [4]:

**Teorema 3.1**  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  lámparas son siempre suficientes y a veces necesarias para iluminar cualquier polígono ortogonal con  $n$  vértices.

La prueba que daremos aquí aparece en [14]. Hasta la fecha, hay al menos cinco pruebas diferentes de este resultado; ver [3, 4, 5, 8, 11]. Nuestra prueba está basada en resultados recientes de iluminación con reflectores [1, 2], así como la prueba de J. O'Rourke [8] de este mismo resultado.

Dado un polígono ortogonal  $P$ , definimos un *corte horizontal* o *vertical* de  $P$ , como la extensión de una arista horizontal o vertical de  $P$  a partir de un vértice concávo hacia el interior de  $P$  hasta su punto de intersección con la frontera de  $P$ . Un corte horizontal o vertical de  $P$  se llama *corte impar* si divide  $P$  en dos polígonos ortogonales de tal manera que al menos uno de los polígonos resultantes tenga  $4k + 2$  vértices, para algún entero  $k$ .

O'Rourke observa que si podemos demostrar que todo polígono ortogonal tiene un corte impar, entonces podemos probar el Teorema 3.1 por inducción sobre el número de vértices, ya que si  $n_1 + n_2 \leq n + 2$  y  $n_1 = 4k + 2$ , entonces  $\lfloor \frac{n_1}{4} \rfloor + \lfloor \frac{n_2}{4} \rfloor \leq \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ . Recordemos que los ángulos generados en los vértices de un polígono ortogonal son de tamaño  $\frac{\pi}{2}$  o  $\frac{3\pi}{4}$ . Utilizando este hecho, es fácil probar que en todo polígono ortogonal con  $n$  vértices, el número de vértices concávos es  $\frac{n-4}{2}$ . Dado un polígono ortogonal  $P$ , podemos clasificar sus aristas de forma natural en cuatro tipos diferentes, aristas *superiores*, *derechas*, *inferiores* e *izquierdas*. Un vértice concávo de  $P$  será llamado un vértice *superior-izquierdo* si las aristas incidentes a él son una superior, y una izquierda. Vértices *superior-derecho*, *inferior-derecho* e *inferior-izquierdo* son definidos análogamente, ver Figura 3.

Ahora procedemos a probar el Teorema 3.1.

PRUEBA: Para polígonos con cuatro o seis vértices, nuestro resultado es obvio. Supongamos que  $P$  tiene al menos ocho vértices. Sean  $S_1$  el subconjunto de los vértices de  $P$  que contiene todos los vértices superior-derechos e inferior-izquierdos.  $S_2$  contiene todos los vértices superior-izquierdos e inferior-derechos.

Como  $P$  tiene  $\frac{n-4}{2}$  vértices concávos, alguno de  $S_1$  o  $S_2$  contiene a lo más  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  vértices. Supongamos que es  $S_1$ . Por tanto, si los vértices de  $S_1$  iluminan  $P$ , hemos terminado. Supongamos entonces que  $S_1$  no ilumina  $P$ . Ahora demostraremos que  $P$  tiene un corte horizontal o vertical impar. Sea  $p$  un punto en  $P$  que no está iluminado por ningún elemento de  $S_1$ . Sea  $c$  el segmento horizontal más largo que contiene a  $p$  que está contenido en  $P$ , y  $e$  y  $f$  las aristas de  $P$  que contienen los extremos de  $c$ ; ver la Figura 4.

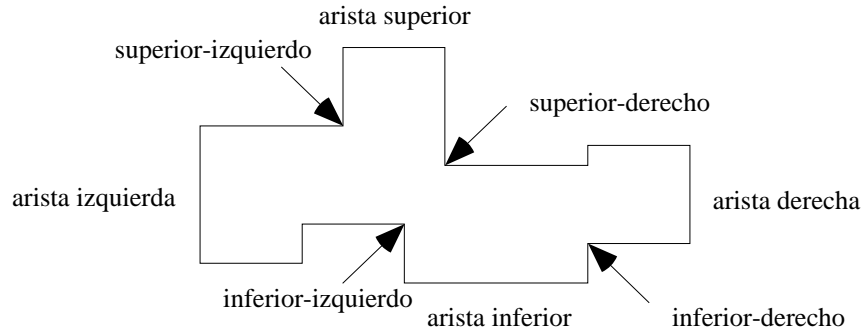


Figura 3: Clasificando las aristas de un polígono ortogonal.

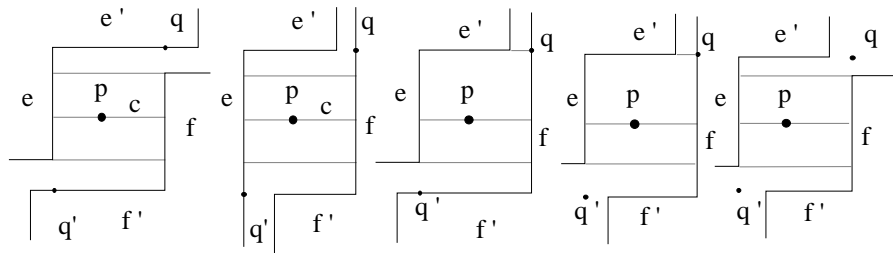


Figura 4: Salvo simetrías, éstos son los casos generados cuando  $q$  y  $q'$  no son vértices de  $P$ .

Sea  $R$  el rectángulo más grande contenido en  $P$  con lados paralelos a los ejes coordenados que contenga a  $c$ .

Llamemos  $e'$  y  $f'$  a las aristas de  $P$  que intersectan a las aristas inferior y superior de  $R$  respectivamente. Como  $p$  no está iluminado por  $S_1$ ,  $e$  y  $e'$  se intersectan en la esquina superior-izquierda de  $R$ . Análogamente,  $f$  y  $f'$  se intersectan en la esquina inferior-derecha de  $R$ . Sean  $q$  y  $q'$  los vértices superior-derecho e inferior-izquierdo de  $R$  respectivamente. Si ambos son vértices de  $P$ , entonces  $P = R$ . Analizamos dos casos:

1.  $q$  y  $q'$  no son vértices de  $P$ .
2. Exactamente uno de ellos digamos  $q$ , es vértice de  $P$ .

En el primer caso, es fácil ver que podemos generar dos cortes horizontales en  $P$  que generan un rectángulo contenido en  $R$  que contiene a  $c$ ; ver la Figura 4. Es fácil ver que uno de estos cortes es un corte impar.

Supongamos entonces que solamente  $q$  es vértice de  $P$ . Si tanto  $e$  como  $f'$  están totalmente contenidas en las aristas izquierda e inferior de  $R$  respectivamente, entonces extendiendo  $e$  y  $f'$  hasta que se intersecten, obtenemos un polígono con  $n - 4$  vértices, que por inducción puede iluminarse con  $\lfloor \frac{n-4}{4} \rfloor$  lámparas, más  $R$ , que puede iluminarse con una sola lámpara, ver la Figura 5.

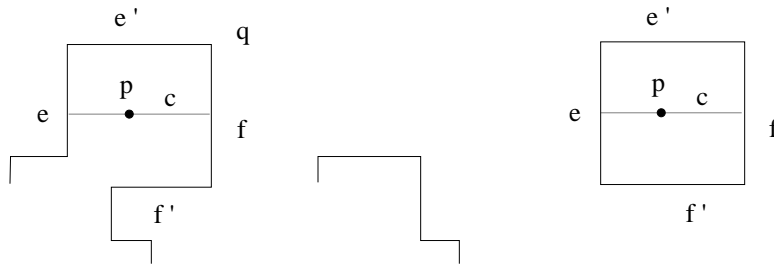


Figura 5: El caso en que  $e$  y  $f'$  están contenidas en las aristas izquierda e inferior de  $R$ .

Supongamos entonces que  $f'$  contiene la arista inferior de  $R$ , y sea  $w$  el vértice inferior de  $e$ . Sea  $l$  el segmento horizontal que une  $w$  con  $f'$ . Desplacemos  $l$  hacia la izquierda hasta que alcance una arista vertical de  $P$ , o el extremo izquierdo de  $f'$  o de la arista horizontal de  $P$  incidente a  $w$ . En el segundo caso, tracemos una vertical en este punto que corte a  $P$  en dos polígonos, uno con  $n - 4$  vértices, y otro con seis. Por inducción nuestro resultado queda probado.

Supongamos entonces que  $l$  alcanza una arista vertical de  $P$ . Sea  $x$  el vértice de  $P$  más alto que esté contenido en  $l$ . Entonces podemos generar dos cortes, uno horizontal  $h$  y el otro vertical  $h'$ , ver la Figura 6. Es fácil verificar que uno de estos cortes es un corte impar. Esto termina nuestra prueba. ■

## 4. El Problema de los Tres Reflectores

En esta sección estudiaremos el *Problema de los Tres Reflectores*. Nuestro objetivo en esta sección es probar el siguiente resultado:



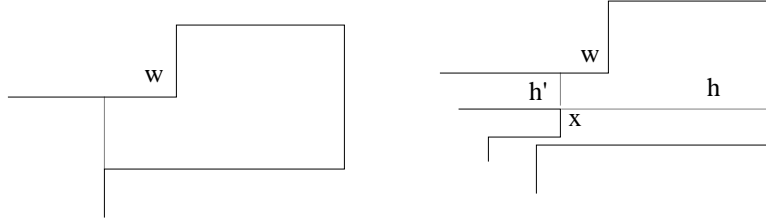


Figura 6: El caso en que  $f'$  contiene la arista inferior de  $R$ .

**Teorema 4.1** [15] Sean  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  tres ángulos tales que  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$ , y sea  $P$  polígono convexo. Entonces siempre podemos colocar tres reflectores de tamaño a lo más  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  con sus ápices sobre vértices de  $P$  de manera que  $P$  quede iluminado, y no coloquemos más de un reflector sobre cada vértice de  $P$ .

PRUEBA: Si  $P$  es un triángulo, nuestro resultado es cierto. Sea  $P$  un polígono convexo con al menos cuatro vértices, y supongamos que  $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3$ . Observemos primero que  $\alpha_2 < \frac{\pi}{2}$  y que como  $P$  tiene al menos cuatro vértices, uno de sus ángulos internos generado en alguno de sus vértices es mayor o igual que  $\frac{\pi}{2}$ . Sea  $T$  un triángulo cuyos ángulos sean  $\alpha_1, \alpha_2$ , y  $\alpha_3$  tal que:

1. El vértice de  $T$  de tamaño  $\alpha_2$  está colocado sobre un vértice  $v$  de  $P$  que genera un ángulo mayor o igual a  $\alpha_2$ .
2. Los otros dos vértices de  $T$  están colocados sobre dos puntos  $x, y$  en la frontera de  $P$ .

Supongamos que tanto  $x$  como  $y$  pertenecen a aristas diferentes de  $P$ , digamos a  $e_1$  y  $e_2$ ; ver la Figura 7. El caso cuando  $x$  y  $y$  pertenecen a la misma arista de  $P$  es fácil de resolver y no lo cubriremos en este trabajo.

Coloquemos un reflector  $f_2$  de apertura  $\alpha_2$  en  $v$  de tal manera que ilumine  $T$ . Sea  $C$  el círculo determinado por los vértices de  $T$ . Es fácil ver que al menos un vértice de  $e_1$  y  $e_2$  no está contenido en el interior de  $C$ . Sean  $u$  y  $w$  estos vértices. Hay dos casos que analizar:

1.  $u \neq w$ . Coloquemos un reflector  $f_1$  sobre  $u$  iluminando la zona angular determinada por  $v, u, x$  y otro,  $f_3$  sobre  $w$  iluminando la zona angular determinada por  $v, w, y$ . Como  $f_1$  y  $f_2$  no están en el interior de  $C$ , los ángulos de iluminación de  $f_1$  y  $f_3$  son a lo más,  $\alpha_1$  y  $\alpha_3$  respectivamente.

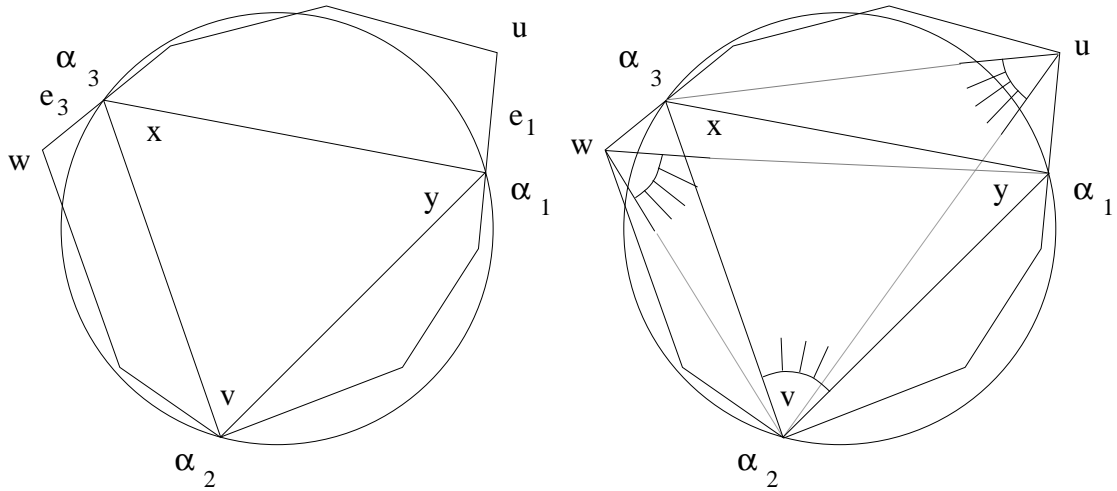


Figura 7: El caso en que  $x$  y  $y$  pertenecen a aristas diferentes de  $P$ .

2.  $u = w$ . Sea  $T'$  el triángulo determinado por el segmento que une a  $x$  con  $y$ , y las tangentes a  $C$  en estos puntos. El ángulo generado en el vértice  $z$  de  $T'$  que no está sobre  $C$  es  $\pi - 2\alpha_2$ . Nótese que  $z$  pertenece al interior del triángulo  $T''$  con vértices  $x, y, u$  y por tanto el ángulo de  $T''$  en  $u$  es menor que  $\pi - 2\alpha_2$ . Como  $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3$   $\pi - 2\alpha_2 \leq (\pi - (\alpha_1 + \alpha_2)) = \alpha_3$ . Por tanto colocando un reflector de tamaño a lo más  $\alpha_3$  en  $u$  iluminamos  $P$ . ■

Es interesante notar que el resultado anterior no se generaliza para más de tres reflectores. O'Rourke, Streinu y Shermer [6] probaron que si  $m$  es suficientemente grande, existen ángulos  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  que suman  $\pi$  y polígonos con  $n \geq m$  vértices que no pueden ser iluminado con  $m$  reflectores de tamaños  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  colocados sobre sus vértices.

Un problema abierto es el de determinar el valor máximo de  $m$  para el cual nuestro resultado se generaliza.

## 5. Un problema abierto sobre espejos

Para terminar este artículo, presentamos un problema abierto sobre espejos propuesto por J. Zaks y J. Urrutia [16].

Supongamos que tenemos una colección  $F$  de segmentos de líneas cerrados y ajenos que representan una colección de espejos que reflejan luz en ambos lados, y sea  $p$  un punto en el plano.

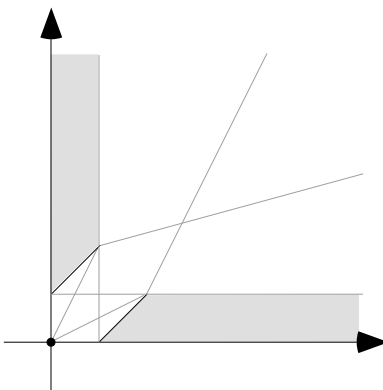


Figura 8: Dos espejos que crean una sombra con dos componentes. Nuestra lámpara está colocada en el origen.

Supongamos que tenemos una lámpara colocada en  $p$  que emite luz a su alrededor. Una región  $S$  del plano con interior no vacío será llamada la sombra de  $F$ , si todo punto en el interior de  $S$  no es iluminado por al menos un rayo de luz que llegue a él ya sea directamente de  $p$ , o después de reflejarse varias veces en algunos espejos de  $F$ ; ver la Figura 8.

**Conjetura 5.1** *Sea  $F$  una familia de  $n$  espejos finitos y  $p$  un punto que no está en la recta generada por alguno de los espejos en  $F$ . Entonces siempre se genera una sombra de área infinita en el plano.*

Un ejemplo interesante de analizar consiste en colocar dos espejos que unen las siguientes parejas de puntos  $(1, 0)$  con  $(2, 1)$  y  $(0, 1)$  con  $(2, 1)$ . Es fácil ver que en este caso, la sombra generada consiste de dos corredores limitados por nuestros espejos y semilíneas paralelas a los ejes coordenados como se muestra en la Figura 8.

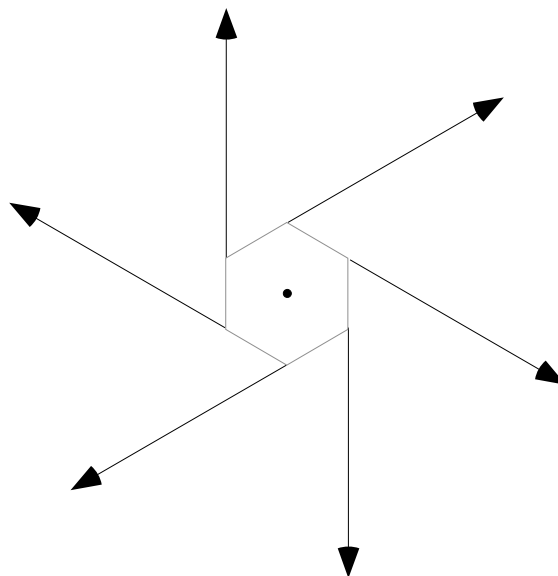


Figura 9: Una colección de seis espejos que no generan sombra.

Es importante ver que la condición de finitud de los espejos es indispensable, ya que de otra manera, nuestra conjetura es falsa. En la Figura 9 mostramos una colección de espejos colocados a lo largo de seis rayos obtenidos al lanzar un rayo de luz a partir de cada uno de los vértices de un hexágono regular, en la dirección determinada por la arista adyacente a cada vértice en el sentido de las agujas del reloj. Es fácil verificar que si colocamos una lámpara en el centro del hexágono, todo el plano queda iluminado. Este ejemplo fue dado por M. Poggiola [10].

## Referencias

- [1] J. Abello, V. Estivill-Castro, T. Shermer and J. Urrutia. Illumination of orthogonal polygons with orthogonal floodlights. Por aparecer en *International Journal in Computational Geometry*.
- [2] V. Estivill-Castro, and J. Urrutia. Optimal floodlight illumination of orthogonal polygons. *Proc. Sixth Canadian Conference on Computational Geometry*, pp. 81-86, (1994).

- [3] E. Györy. A short proof of the rectilinear art gallery theorem. *SIAM J. Alg. Disc. Meth.* **7** pp. 452-454, (1986).
- [4] J. Kahn, M. Klawe, and D. Kleitman. Traditional galleries require fewer watchmen. *SIAM J. Algebraic and Discrete Methods* **4**, pp. 194-206, (1983).
- [5] A. Lubiw. Decomposing polygonal regions into convex quadrilaterals. *Proc. First ACM Computational Geometry Symposium*, Baltimore, pp. 97-106, (1985).
- [6] J. O'Rourke, T. Shermer, and I. Streinu. Illuminating convex polygons with vertex floodlights. in *Proceedings of the Seventh Canadian Conference on Computational Geometry*, pp. 151-156, (1995).
- [7] J. O'Rourke. *Art Gallery Theorems and Algorithms*. Oxford University Press, (1987).
- [8] J. O'Rourke. An alternate proof of the rectilinear art gallery theorem. *J. of Geometry* **21**, pp. 118-130, (1983).
- [9] J. O'Rourke, Combinatorics of visibility and illumination problems. *Technical report 1996*.
- [10] M. Pocciola. Comunicación personal, (1993).
- [11] J.R. Sack, and G. Toussaint. Guard placement in rectilinear polygons. *Computational Morphology*, G.T. Toussaint (editor) Elsevier Science Publishers, pp. 153-175, (1988).
- [12] T. Shermer. Recent results in Art Galleries. *Proceedings of the IEEE*, pp. 1384-1399, (1992).
- [13] J. Urrutia. On the number of internal and external visibility edges of polygons. Technical report TR-97-04, Department of Computer Science, University of Ottawa, February, 1997.
- [14] J. Urrutia. Sixth proof of the Orthogonal Art Gallery Theorem. Technical report TR-97-03, Department of Computer Science, University of Ottawa, February, 1997.

- [15] J. Urrutia. Art Gallery and illumination problems. Por aparecer en *Handbook on Computational Geometry* J.R. Sack and J. Urrutia, eds. Elsevier Science Publishers.
- [16] Comunicación personal, 1990.