

# Vigilancia en Galerías de Arte Curvilíneas

Javier Cano-Vila \*

Joel Espinosa Longi \*\*

Jorge Urrutia \*\*\*

## Resumen

En este artículo consideramos el problema de vigilar una galería de arte curvilínea. Las aristas de este tipo de galerías, pueden ser arcos de curvas convexas. Es fácil ver que en general, el número de guardias necesarios para vigilar una galería de arte curvilínea, no es acotado. Sin embargo cuando todas las aristas de una galería curvilínea son *cóncavas* o *convexas* con respecto al interior de la galería, el número de guardias necesarios, resulta ser una función lineal del número de vértices de la galería. Recientemente M. I. Karavelas, E. P. Tsigaridas y Cs. D. Tóth [3, 4] probaron que  $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$  guardias colocados en vértices de la galería son suficientes y a veces necesarios para vigilar una galería de arte curvilínea en la cual, todas sus aristas son convexas con respecto al interior. Sin embargo, cuando se permite que los guardias estén en cualquier parte de la galería, no se conoce un ejemplo en el que se necesiten más de  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  guardias para vigilarla. En este trabajo demostramos que cualquier galería con aristas convexas respecto a su interior, siempre se puede vigilar usando a lo más  $\lfloor \frac{5n}{8} \rfloor$  guardias colocados en cualquier parte de la galería.

## 1. Introducción

Sea  $a$  una curva que une dos puntos  $v$  y  $v'$ . Decimos que  $a$  es un *arco convexo* si y solo si la unión de  $a$  con el segmento de recta que une a  $v$  y  $v'$  es una curva simple que acota a una región convexa del plano, sea  $C_a$  dicha región.

Sea  $V = \{v_0, v_2, \dots, v_{n-1}\}$  un conjunto de  $n$  puntos en el plano, y  $A = \{a_0, \dots, a_{n-1}\}$  un conjunto de  $n$  arcos convexas que no se intersecan excepto, posiblemente, en sus extremos, donde los extremos de  $a_i$  son exactamente  $v_i$  y  $v_{i+1}$  (en suma módulo  $n$ ). Los elementos de  $A$  los llamaremos las aristas de  $P$ . La región cerrada y acotada por la unión de los elementos de  $A$ , la llamaremos un *Polígono Curvilíneo* cuyos conjuntos de aristas y vértices son respectivamente  $A$  y  $V$ .

Sea  $P$  un polígono curvilíneo, y  $a_i$  una arista de  $P$ . Diremos que  $a_i$  es *convexa* con respecto a  $P$  si y solo si para cualquier punto  $p$  de  $a_i$  existe un  $\varepsilon > 0$  tal que cualquier punto al interior de  $C_{a_i}$  a distancia menor o igual a  $\varepsilon$  de  $p$  está en  $P$ . Si  $a_i$  no es convexa con respecto a  $P$ , diremos que es *cóncava*. A partir de ahora asumiremos que todas las aristas de  $P$  son convexas, o que todas son cóncavas con respecto a  $P$ . En el primer caso,  $P$  será un *polígono arista-convexo*, en el segundo *polígono arista-cóncavo*, ver la Figura 1.

Uno de los problemas clásicos de la Geometría Computacional es el *Problema de la Galería de Arte*, donde una galería de arte, es una región cerrada del plano acotada por un polígono simple  $P$ . Sean  $g$  y  $p$  puntos en  $P$ . Decimos que  $g$  ve a  $p$  si el segmento  $[g, p]$  de recta que los une está totalmente contenido en  $P$ . El problema consiste entonces, en encontrar un conjunto  $G$  de puntos de  $P$  llamados guardias, de tal forma que cualquier punto  $p \in P$  es visto por algún guardia  $g \in G$ . En 1975, V. Chvátal probó que cualquier galería de arte con  $n$  vértices siempre puede ser vigilada con a lo más  $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$  guardias. A partir de entonces, surgieron muchas variantes del problema, al lector interesado se le refiere a los compendios [5, 7, 8] dedicados a este problema y sus variantes.

---

\*Posgrado en Ciencias e Ingeniería de la Computación, Universidad Nacional Autónoma de México, [himura.kno@gmail.com](mailto:himura.kno@gmail.com)

\*\*Posgrado en Ciencias e Ingeniería de la Computación, Universidad Nacional Autónoma de México, [j.longi@gmail.com](mailto:j.longi@gmail.com)

\*\*\*Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México, [urrutia@matem.unam.mx](mailto:urrutia@matem.unam.mx). Research supported in part by MTM2006-03909 (Spain) and CONACYT of México, Proyecto SEP-2004-Co1-45876.

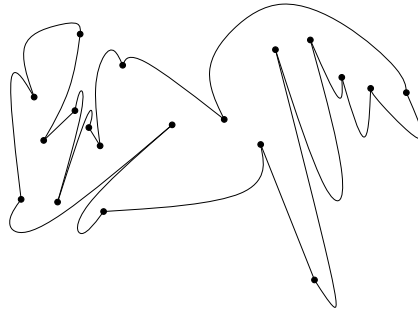


Figura 1:  $P$ , un polígono arista-convexo.

Recientemente Karavelas y Tsigaridas [3] propusieron una nueva variante del problema en la cual la frontera de las galerías a vigilar, están acotadas por polígonos arista-convexos, o arista-cóncavos. Dichas galerías, serán llamadas *galerías arista-convexas*, o *galerías arista-cóncavas* respectivamente. Sorprendentemente, el número de guardias requeridos para vigilar cualquier galería arista-convexa, o arista-cóncava está siempre acotado por una función lineal en el número de vértices de  $P$ .

Karavelas y Tsigaridas [3] prueban que  $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$  vértices guardia son siempre suficientes para vigilar cualquier galería arista-convexa con  $n$  vértices, además, prueban que  $2n - 4$  puntos guardia son siempre suficientes y en ocasiones necesarios para vigilar cualquier galería arista-cóncava con  $n$  vértices. Posteriormente junto a Cs. D. Tóth [4] muestran una familia de polígonos arista-convexos que requieren al menos  $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$  vértices guardia para ser vigilados. Para puntos guardia,  $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$  siguen siendo siempre suficientes, sin embargo no se conoce ningún ejemplo donde se necesiten más de  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  puntos guardia.

El objetivo principal de este artículo, es probar que  $\lfloor \frac{5n}{8} \rfloor$  puntos guardia son siempre suficientes para vigilar cualquier galería arista-convexa con  $n$  vértices. Este es un resultado interesante dado que, es la primera variante del problema de la galería de arte, en la cual se tienen cotas diferentes para el número de puntos guardia y el número de vértices guardia necesarios para vigilar una galería de arte. Para probar el resultado anterior, probamos que cualquier polígono simple con  $n$  vértices,  $n$  par, siempre puede cuadrilaterizarse usando a lo más  $\frac{n-2}{4}$  puntos Steiner colocados al interior del polígono.

Comenzaremos este trabajo dando una prueba más sencilla del resultado de Karavelas y Tsigaridas que  $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$  vértices guardia siempre son suficientes para vigilar una galería arista-convexa con  $n$  vértices.

## 2. El Polígono Rectilíneo Subyacente

Sea  $P$  un polígono arista-convexo, definimos a  $\bar{P}$ , el polígono rectilíneo subyacente de  $P$ , como sigue: sean  $\bar{V} = V$  los vértices de  $\bar{P}$  y definimos a  $\bar{E}$ , las aristas de  $\bar{P}$ , como sigue: Sea  $E_i$  el conjunto de aristas

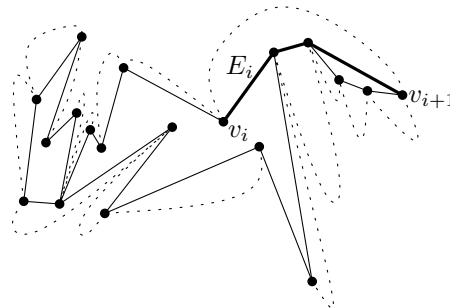


Figura 2: El polígono rectilíneo subyacente de  $P$ .

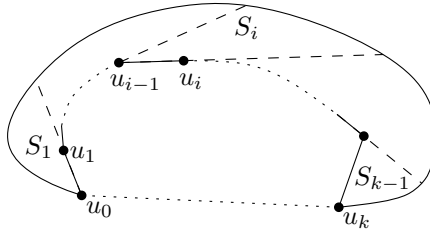


Figura 3: Ilustración de la prueba del Lema 2.1.

de la poligonal definida por el camino más corto contenido en  $P$  entre  $v_i$  y  $v_{i+1}$  para  $i = 0, \dots, n-1$ , como se muestra en la Figura 2, entonces  $\bar{E} = \cup_{i=0}^{n-1} E_i$ . Como se puede ver en la Figura 2,  $\bar{P}$  es una gráfica geométrica conexa formada por componentes 2-conexas y trayectorias que las conectan. Es fácil de ver que cada componente 2-conexa de  $\bar{P}$  es un ciclo. A las regiones que acotan estos ciclos les llamaremos las componentes poligonales de  $\bar{P}$ . No es difícil ver que cada arista de  $\bar{P}$  está en a lo más una componente poligonal de  $\bar{P}$ .

Sea  $a_i$  una arista de  $P$ . La *habitación*  $R_i$  de  $a_i$  es la región cerrada acotada por la unión de  $a_i$  y  $E_i$ , ver la Figura 3. Decimos que un punto  $p \in P$  ve a un segmento de recta  $\ell$  si para todo punto  $q \in \ell$  el segmento de recta que une a  $p$  con  $q$  está contenido en  $P$ . Diremos que un punto  $g$  ve a un conjunto  $S \subset P$  si para todo elemento  $s \in S$  el segmento de recta que une a  $g$  con  $s$  está contenido en  $P$ . El siguiente resultado será de gran utilidad.

**Lema 2.1.** *Para cualquier punto  $p$  en una habitación  $R_i$ , existe una arista  $e$  de  $\bar{E}_i$ , tal que  $p$  ve a  $e$ .*

*Demostración.* Si  $E_i$  contiene únicamente una arista es claro que  $p$  ve a esa arista. Supongamos entonces que  $E_i$  contiene varias aristas de  $\bar{P}$ , digamos  $e_1, e_2, \dots, e_k$  tales que  $e_1$  contenga a  $v_i$  y  $e_k$  a  $v_{i+1}$ . Reetiquetemos los vértices de  $E_i$  como sigue:  $v_i = u_0, u_1, \dots, u_k = v_{i+1}$ . Ahora extendemos cada  $e_j$ , a partir de  $u_j$  hasta que toque a  $a_i$ , para  $j = 1, \dots, k-1$ . Esto define una partición de  $R_i$  en regiones convexas  $S_1, S_2, \dots, S_{k-1}$  tal que  $e_j$  está totalmente contenida en la frontera de  $S_j$ , Figura 3. Claramente  $p$  estará en alguna  $S_j$ , y por lo tanto  $p$  ve a  $e_j$ .  $\square$

### 3. Vértices Guardia

A continuación damos una prueba directa del resultado de Karavelas, Tóth and Tsigaridas [4].

**Teorema 3.1.** *Sea  $P$  un polígono arista-convexo con  $n$  vértices, entonces  $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$  vértices guardia son siempre suficientes y algunas veces necesarios para vigilar  $P$ .*

*Demostración.* Para la parte de suficiencia sea  $T(\bar{P})$  una *triangulación* de  $\bar{P}$ , obtenida al triangular las componentes poligonales de  $\bar{P}$ . Claramente los vértices de  $T(\bar{P})$  pueden ser 3-coloreados de forma que cualquier par de vértices adyacentes en  $T(\bar{P})$  tengan colores distintos, ver la Figura 4. Se sigue del Lema 2.1 y de la prueba de Fisk [2], que cualesquiera dos clases cromáticas de esta tres coloración de  $T(\bar{P})$  vigilan  $P$ , por lo que tomando las dos clases más pequeñas obtenemos un conjunto de a lo más  $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$  guardias que vigilan a  $P$ .

Por razones de completez construimos una familia de polígonos arista-convexos con  $3n$  vértices tales que cualquier conjunto de guardias colocados en vértices de los mismos, tiene al menos  $\frac{2n}{3}$  elementos. Nuestra construcción es muy similar a la presentada en [4]. Sean  $v_1, \dots, v_3$  y  $r_1, \dots, r_3$  los vértices y regiones mostradas en la Figura 5. Para cada  $i \in \{1, 2, 3\}$  el interior de la región  $r_i$  no es vigilada por  $v_i$ . Por lo que es claro que un guardia colocado en cualquiera de  $v_1, \dots, v_3$  no basta para vigilar las habitaciones de estas aristas. Es fácil ver que el ángulo entre  $l_1$  y  $l_2$  puede ser tan cercano a  $\pi$  como queramos, conservando la propiedad anterior, por lo que podemos tomar cualquier polígono convexo y en cada vértice colocar una curva como la mostrada en la la Figura 5, esto nos resulta en un

polígono arista-convexo como el que se muestra en la Figura 6. Esta construcción demuestra la parte de necesidad del teorema.

□

## 4. Puntos Guardia

Cuando eliminamos la restricción de que los guardias estén solo en los vértices de un polígono arista-convexo, el número de guardias necesarios (llamados *puntos guardia*) para vigilar la familia mostrada en la sección anterior se reduce a  $\frac{n}{3} + 1$ . Es fácil ver en la Figura 7 que cualquier punto en la región sombreada de la misma, vigila ese sector de la galería.

Hasta ahora no conocemos ningún ejemplo de polígonos arista-convexos que requieran más de  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  puntos guardia para ser vigilados. En la Figura 8 se muestra un polígono que requiere  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  puntos guardia para ser vigilado. En esta sección probamos que  $\lfloor \frac{5n}{8} \rfloor$  puntos guardia son siempre suficientes para vigilar cualquier polígono arista-convexo.

Sea  $Q$  un polígono simple con  $n$  vértices,  $n$  par. Decimos que  $Q$  es cuadrilaterizable, si podemos encontrar  $\frac{n-4}{2}$  diagonales ajenas que unen parejas de vértices de  $Q$  que lo dividen en  $\frac{n-4}{2} + 1$  cuadriláteros (no necesariamente convexos) con interiores ajenos. Es fácil encontrar para cualquier  $n$  par,  $n \geq 6$ , polígonos con  $n$  vértices que no son cuadrilaterizables. No es difícil ver que si  $Q$  tiene un número par de vértices, siempre podemos agregar algunos puntos Steiner en el interior de  $Q$  de tal manera que existe una cuadrilaterización de  $Q$  tal que los vértices de dichos cuadriláteros son vértices o puntos Steiner.

El siguiente teorema, que por falta de espacio no probamos aquí, es la clave para probar el resultado principal de esta sección. Esto cierra un problema abierto planteado en [6].

**Teorema 4.1.** *Sea  $P$  un polígono simple con  $n \geq 4$  vértices. Entonces si  $n$  es par,  $\lfloor \frac{n-2}{4} \rfloor$  puntos Steiner escogidos en el interior de  $P$  son siempre suficientes y en ocasiones necesarios para cuadrilaterizar a  $P$ . Cuando  $n$  es impar,  $\lfloor \frac{n-1}{4} \rfloor - 1$  puntos Steiner escogidos en el interior de  $P$ , y uno más sobre cualquier arista del mismo, son siempre suficientes y en ocasiones necesarios para cuadrilaterizar a  $P$ .*

No es difícil ver que si los vértices y aristas de  $\bar{P}$  forman una gráfica bipartita, entonces al colorear los vértices de  $\bar{P}$  con dos colores de tal forma que vértices adyacentes reciban colores distintos, los vértices de cualquier clase cromática en esta coloración, siempre bastan para vigilar las habitaciones de  $P$ . Sin embargo, podría ser que el interior de  $\bar{P}$  no esté vigilado. Observemos que si las componentes poligonales de  $\bar{P}$  fueran cuadrilaterizables, al bicolorar los vértices de la gráfica bipartita inducida por dicha cuadrilaterización, los vértices de cualquier clase cromática de dicha coloración, vigilarían las habitaciones de  $P$  y el interior de  $\bar{P}$ . En tal caso,  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  guardias bastan para vigilar  $P$ .

Supongamos que  $\bar{P}$  contiene sólo una componente poligonal y que esta no es un triángulo. Por el Teorema 4.1 podemos obtener una cuadrilaterización del interior de  $\bar{P}$  agregando a lo mas  $\lfloor \frac{n-1}{4} \rfloor$

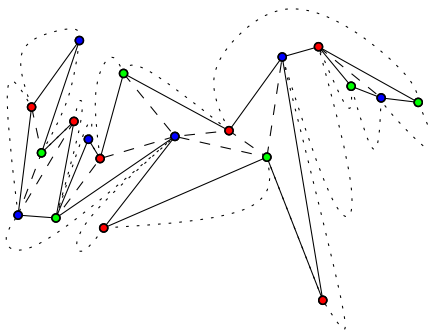


Figura 4: Triangulación y 3-coloración de  $\bar{P}$ .

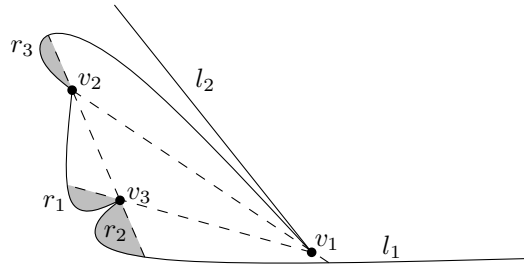


Figura 5: Bloque básico para la construcción de la cota inferior.

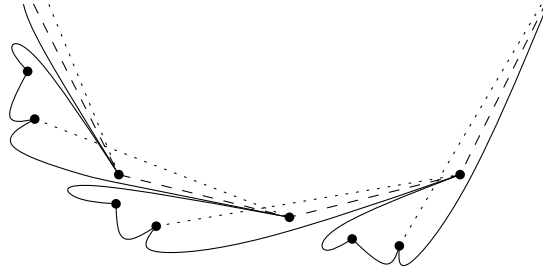


Figura 6: Una parte de un polígono que necesita  $\frac{2n}{3}$  vértices guardia para ser vigilado.

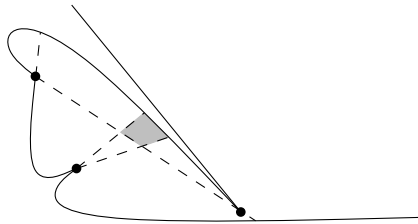


Figura 7: Un solo punto basta para vigilar este bloque.

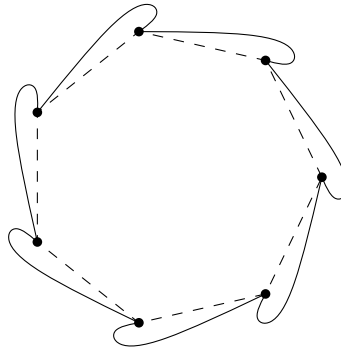


Figura 8: Un polígono arista-convexo que necesita  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  puntos guardia para ser vigilado.

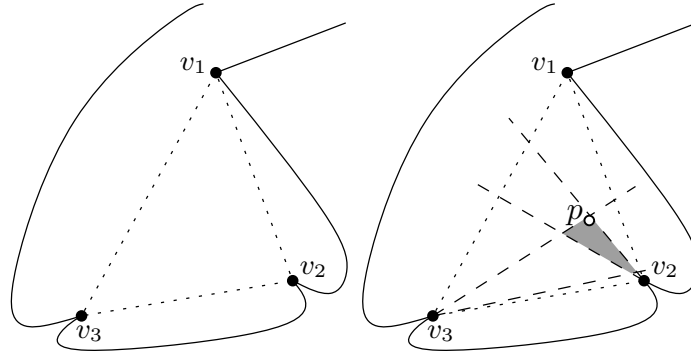


Figura 9: Ilustración del caso 1.

puntos Steiner. Dicha cuadrilaterización induce una gráfica bipartita con a lo más  $\lfloor \frac{5n}{4} \rfloor$  vértices, la cual puede ser 2-coloreada. Por la observación anterior cualquier clase cromática de dicha coloración vigila  $P$ . Tomando la clase cromática más pequeña, obtenemos un conjunto con a lo más  $\lfloor \frac{5n}{8} \rfloor$  puntos guardia (ya que algunos pueden ser puntos Steiner) que vigilan  $P$ .

En general,  $\bar{P}$  puede tener varias componentes poligonales. Es fácil ver que cualesquiera dos componentes poligonales de  $\bar{P}$  comparten a lo más un solo vértice. De esto no es difícil mostrar que si  $\bar{P}$  contiene más de una componente poligonal y ninguna es un triángulo, entonces podemos cuadrilaterizar todas las componentes poligonales de  $\bar{P}$  agregando a lo más  $\lfloor \frac{n-1}{4} \rfloor$  puntos Steiner. Por tanto podemos encontrar un conjunto de a lo más  $\lfloor \frac{5n}{8} \rfloor$  puntos guardia que vigilan  $P$ .

La suposición de que no haya triángulos en  $\bar{P}$  se debe a que cuadrilaterizar cada triángulo de  $\bar{P}$  nos forzaría a agregar más de  $\lfloor \frac{n-1}{4} \rfloor$  puntos Steiner para poder cuadrilaterizar a  $\bar{P}$ . Por otra parte dejar los triángulos como tales y cuadrilaterizar el resto de las componentes poligonales de  $\bar{P}$  no induce una gráfica bipartita. Ahora veremos que los triángulos pueden ser vigilados sin incrementar el número de guardias requeridos.

Supongamos entonces que  $\bar{P}$  tiene un solo triángulo  $T$ . Reconocemos los siguientes casos:

1.  $T$  tiene un único vértice con grado mayor a 2 en  $\bar{P}$ .
2.  $T$  tiene más de un vértice con grado mayor a 2 en  $\bar{P}$ .

Para el primer caso es fácil ver que los vértices de  $T$  deben ser consecutivos en  $P$ , por lo que sin pérdida de generalidad podemos decir que son  $v_1, v_2, v_3$ , y que  $v_1$  es el vértice de grado mayor a 2 en  $\bar{P}$ , ver la Figura 9. Sea  $v_4$  el segundo vértice de  $a_3$ . Es fácil ver que en este caso siempre podemos escoger un punto  $p$ , como se muestra en la Figura 9 que vigila a  $T$ , las habitaciones de  $a_1$  y  $a_2$ , así como parte de la habitación de  $a_3$ . Ahora podemos substituir  $a_3$  por un nuevo arco convexo que contenga la parte no iluminada de la habitación de  $a_3$  y que una a  $v_1$  con  $v_4$ , obteniendo un polígono arista-convexo con  $n - 2$  vértices. De esta forma, podemos eliminar todos los triángulos de  $\bar{P}$  con dos vértices de grado dos.

Antes de trabajar el segundo caso hagamos la siguiente observación que será de utilidad. Sea  $v_i$  un vértice de grado mayor o igual a 3. Claramente  $v_i$  está en los extremos de  $E_i$  y  $E_{i-1}$ , al tener grado mayor a 2,  $v_i$  incide al menos en tres aristas distintas,  $e_1, e_2$  y  $e_3$  de  $\bar{P}$ . Sin pérdida de generalidad podemos asumir que  $e_1 \in E_i$  y  $e_2 \in E_{i-1}$ . Por tanto  $v_i$  debe aparecer en una componente poligonal de  $\bar{P}$ . Claramente  $e_1$  y  $e_2$  no están en la misma componente poligonal, de lo contrario  $v_i$  necesariamente tendría grado 2. Es fácil ver que  $e_3 \in E_j$ , para alguna  $j \neq i, j \neq i - 1$ , de esto se sigue la siguiente Observación:

**Observación 4.2.** Todo vértice  $v_i$  de  $P$ , con grado mayor a 2 en  $\bar{P}$ , necesariamente incide en dos aristas de una  $E_j$ , además al menos una de esas aristas pertenece a una componente poligonal de  $\bar{P}$ .

Supongamos ahora que  $T$  tiene más de un vértice con grado mayor a 2 en  $\bar{P}$ . Sean  $u, v$  y  $w$ , los vértices de  $T$ , y digamos que  $u$  y  $v$  tienen grado mayor a 2. Sea  $\bar{P}'$  la subgráfica de  $\bar{P}$  obtenida al remover la arista  $uv$  de  $\bar{P}$ . Dado que  $\bar{P}'$  ya no contiene triángulos, podemos obtener una cuadrilaterización  $Q(\bar{P}')$  de  $\bar{P}'$ , agregando a lo más  $\lfloor \frac{n-1}{4} \rfloor$  puntos Steiner. Sea  $C$  una 2-coloración de  $Q(\bar{P}')$  tal que vértices adyacentes tengan distintos colores. Falta probar que cualquiera de las clases cromáticas de  $C$  vigila a  $P$ .

Es claro que  $u$  y  $v$  pertenecerán a la misma clase cromática en  $C$ , digamos la clase azul, y  $w$  a la otra, digamos la roja. Claramente el interior de  $\bar{P}$  es vigilado por cualquiera de las dos clases cromáticas. Por el lema 2.1 sabemos que la clase azul vigila todas las habitaciones de  $P$  ya que tendremos al menos un guardia por cada arista de  $\bar{P}$ , sin embargo, no es directo que la clase roja vigile también las habitaciones de  $P$ .

Notemos que la arista  $uv$  necesariamente pertenece a alguna  $E_i$ . Distinguiamos los siguientes sub-casos.

**Caso 2.1.**  $|E_i| = 1$ . En este caso  $u$  y  $v$  son los extremos de  $a_i$ , y por la Observación 4.2 existen dos cadenas  $E_j$  y  $E_s$  tales que  $uw \in E_j$  y  $vw \in E_s$ . Dado que  $E_j$  y  $E_s$  son cadenas convexas,  $w$  vigila completamente la habitación de  $a_i$ , que era la única habitación que no podíamos garantizar que era vigilada por la clase cromática roja. Figura 10a.

**Caso 2.2.**  $|E_i| > 1$ , y  $u$  o  $v$  está en algún extremo de  $E_i$ , Figura 10b. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que  $u$  es el extremo de  $E_i$ , nuevamente tenemos que la arista  $uw$  pertenece a una cadena  $E_j$ , donde  $u$  no está en ningún extremo de  $E_j$ . Extendamos la arista  $vw$  desde  $v$  hasta que toque a  $a_i$ , sea  $v'$  el punto donde la toca, definamos el arco  $a'_i$  como la unión del segmento de  $a_i$  que conecta a  $v'$  con  $u$  y el segmento de recta que une a  $v'$  con  $v$ . Análogamente, sea  $a''_i$  el arco obtenido al unir el segmento de  $a_i$  que conecta a  $v'$  con el otro extremo de  $a_i$  y el segmento de recta que une a  $v'$  con  $v$ . Entonces podemos partir  $P$  en dos polígonos arista-convexos  $P_1$  y  $P_2$ , con la característica de sus conjuntos de vértices son subconjuntos propios de los vértices de  $P$ , y solo comparten el vértice  $v$ . No es difícil probar que  $\bar{P}_1 \cup \bar{P}_2 = \bar{P}$ . Supongamos que  $P_1$  es el polígono que contiene a  $w$ , entonces cualquier clase cromática de  $C$  vigila completamente a  $P_2$ , y todo  $P_1$  a excepción posiblemente de la habitación de  $a'_i$ . Sin embargo, por la observación 4.2, y la forma en que se construyó  $a'_i$ , el punto  $w$  vigila completamente tal habitación, por lo que cualquier clase cromática vigila también a  $P_1$ , y por tanto a  $P$ .

**Caso 2.3.**  $|E_i| > 1$ , y ni  $u$  ni  $v$  están en algún extremo de  $E_i$ , Figura 10c. Observamos que al extender las aristas  $uw$  y  $vw$  en  $u$  y  $v$  respectivamente hasta que toquen a  $a_i$ , dividimos  $P$  en tres polígonos arista convexas  $P_1, P_2$  y  $P_3$  de manera similar al caso anterior. Nuevamente  $\bar{P}_1 \cup \bar{P}_2 \cup \bar{P}_3 = \bar{P}$ , por lo que si  $P_1$  es el polígono que contiene a  $w$ , entonces  $P_2$  y  $P_3$  no contienen triángulos, por lo que cualquier clase cromática de  $C$  los vigila completamente. Vemos que la clase roja también vigila a  $P_1$  ya que la única habitación que no podría vigilar sería la de la arista que une a  $u$  con  $v$  en  $P_1$ , la cual, debido a como se construyó, está completamente vigilada por  $w$ . Por tanto cualquier clase cromática vigila a  $P$ .

De forma análoga podemos eliminar todos los triángulos de  $\bar{P}$ . Por tanto hemos probado el siguiente resultado:

**Teorema 4.3.** *Sea  $P$  un polígono arista-convexo con  $n$  vértices, entonces  $\lfloor \frac{5n}{8} \rfloor$  puntos guardia son siempre suficientes para vigilar a  $P$ .*

## 5. Conclusiones

En este artículo demostramos que siempre es posible vigilar un polígono arista-convexo  $P$  colocando a lo más  $\lfloor \frac{5n}{8} \rfloor$  guardias en cualquier parte de  $P$ . Cuando se restringen los guardias a estar solo en vértices,  $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$  son siempre suficientes y a veces necesarios.

No conocemos ningún polígono arista-convexo que necesite más de  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  puntos guardia para ser vigilado. Conjeturamos que  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  puntos guardia son siempre suficientes para vigilar cualquier polígono arista-convexo. Nuestro resultado es ya interesante, porque esta es la primera variante que conocemos

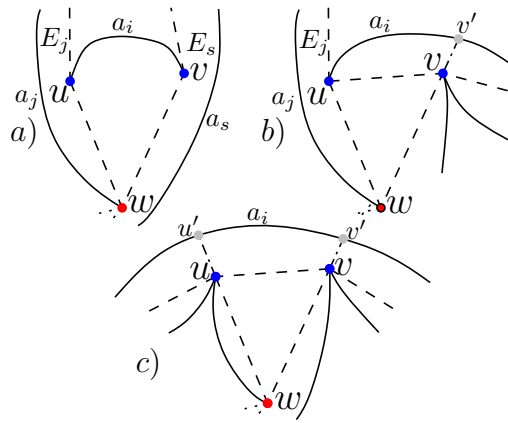


Figura 10: Ilustración del caso 2.

del problema de la galería de arte en la que se tienen cotas distintas sobre el número de vértices guardia y puntos guardia suficientes para vigilar nuestra galería de arte. En la versión completa de este artículo, probamos que si el polígono subyacente de  $P$  es un *polígono ortogonal*, esto es cada una de sus aristas es paralela al eje  $x$  o  $y$ ,  $\frac{n}{2}$  guardias son siempre suficientes y a veces necesarios para vigilar  $P$ .

## Referencias

- [1] V. Chvátal, *A combinatorial theorem in plane geometry*, J. Combin. Theory Ser B 18 (1975), 39-41
- [2] S. Fisk, *A short proof of Chvátal's watchman theorem*, J. Combin. Theory Ser B 24 (1978), 374
- [3] M. I. Karavelas and E. P. Tsigaridas, *Guarding curvilinear art galleries with vertex or point guards*, Research Report 6132, INRIA, 2007
- [4] M. I. Karavelas, Cs. D. Tóth and E. P. Tsigaridas *Guarding curvilinear art galleries with vertex or point guards*, Computational Geometry: Theory and Applications, to appear.
- [5] J. O'Rourke. *Art Gallery Theorems and Algorithms*. The International Series of Monographs on Computer Science. Oxford University Press, New York, NY, 1987.
- [6] S. Ramaswami, P. Ramos and G. Toussaint. *Converting triangulations to quadrangulations.*, Computational Geometry: Theory And Applications, vol. 9, pp 257-276, 1998.
- [7] T. C. Shermer. *Recent results in art galleries*. Proc. IEEE, 80(9):1384-1399, 1992.
- [8] J. Urrutia, *Art gallery and illumination problems*, J.-R. Sack and J. Urrutia editors, *Handbook of Computational Geometry*, 973-1027. North-Holland, 2000.